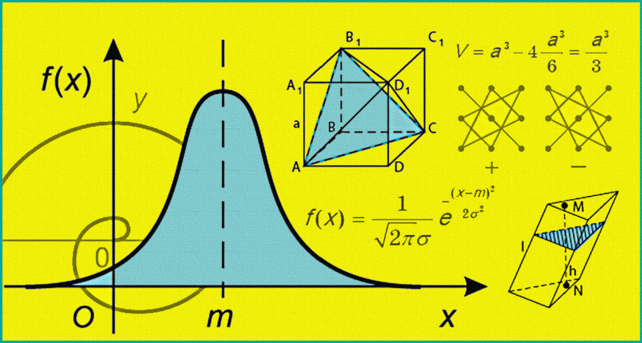
КАРМАННЫЙ СПРАВОЧНИК

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ И СТУДЕНТОВ

Формулы, алгоритмы, примеры



ПИТЕР®

ББК 22.1я22
УДК 51(03)
С89

Судавная Ольга

С89 Краткий справочник по математике для абитуриентов и студентов. Формулы, алгоритмы, примеры. — СПб.: Питер, 2013. — 320 с.: ил.

ISBN 978-5-459-01713-7

Судавная Ольга Илларьевна – преподаватель высшей математики на кафедре высшей математики СПбНИУИТМО (Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, бывший ЛИТМО), имеет педагогический стаж более 40 лет, является автором целого ряда учебных пособий по математике.

Краткий справочник содержит основные сведения как по элементарной, так и по высшей математике. Его особенностью является наличие не только определений и формул, но и иллюстрирующих их примеров.

Справочник предназначен для выпускников средних учебных заведений, слушателей подготовительных курсов, студентов вузов, а также для всех тех, кому необходимо оперативно восстановить в памяти какие-либо математические понятия.

ББК 22.1я22
УДК 51(03)

ISBN 978-5-459-01713-7

Содержание

Используемые обозначения 12

1. Числовые множества и операции с числами . . . 14

1.1. Числовые множества. 14

1.2. Числовые промежутки 16

1.3. Признаки делимости 17

1.4. Арифметические операции с действительными числами . . .18

1.5. Модуль действительного числа 19

1.6. Арифметические операции с обыкновенными дробями 20

1.7. Связь между десятичными и обыкновенными дробями 22

1.8. Операция возведения в степень 23

1.9. Формулы сокращенного умножения 26

1.10. Арифметические операции с корнями. 27

1.11. Операции с комплексными числами 29

1.12. Пропорции и средние значения 34

1.13. Некоторые числовые суммы ($n \in N$) 35

1.14. Числовые неравенства 36

1.15. Логарифмы 37

2. Комбинаторика и бином Ньютона 40

2.1. Комбинаторика 40

2.2. Бином Ньютона 42

3. Алгебраические уравнения и неравенства 44

3.1. Уравнения и неравенства первой степени. 44

3.2. Уравнения и неравенства второй степени. 45

3.3. Уравнение третьей степени 48

3.4. Уравнение четвертой степени 48

3.5. Уравнение n-й степени 49

4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 51
4.1. Показательные уравнения и неравенства 51
4.2. Логарифмические уравнения и неравенства. 52
5. Последовательности и прогрессии 54
5.1. Числовая последовательность. 54
5.2. Арифметическая прогрессия. 54
5.3. Геометрическая прогрессия. 55
5.4. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия 56
6. Функции и их графики. 58
6.1. Определение и основные характеристики функции 58
6.2. Графики некоторых функций. 60
7. Тригонометрия 66
7.1. Градусная и радианная меры углов .66
7.2. Тригонометрическая окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α .67
7.3. Формулы приведения 69
7.4. Основные тригонометрические тождества 70
7.5. Формулы двойного, тройного и половинного аргументов . . .71
7.6. Формулы сложения 73
7.7. Формулы преобразования суммы в произведение 73
7.8. Формулы преобразования произведения в сумму. 74
7.9. Степени синуса и косинуса 75
7.10. Обратные тригонометрические функции и тригонометрические уравнения 76
7.11. Графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций 79

8. Планиметрия 82
8.1. Треугольники................................82
8.2. Четырехугольники..........................86
8.3. Многоугольники 91
8.4. Окружность и круг..........................94
9. Стереометрия 100
9.1. Многогранники 100
9.2. Тела вращения...............................108
10. Линейная алгебра 116
10.1. Матрицы 116
10.2. Определители 122
10.3. Системы линейных уравнений.............124
11. Операции с векторами................ 129
11.1. Определение и характеристики вектора 129
11.2. Линейные операции с векторами 131
11.3. Скалярное произведение векторов 134
11.4. Векторное произведение векторов 135
11.5. Смешанное произведение трех векторов.............137
11.6. Координатная форма вектора 138
12. Аналитическая геометрия на плоскости..... 144
12.1. Декартова система координат на плоскости 144
12.2. Уравнения прямой на плоскости 147
12.3. Кривые второго порядка на плоскости 150
12.4. Полярная система координат на плоскости.............155
12.5. Кривые, заданные параметрическими уравнениями
и уравнениями в полярных координатах 156

13. Аналитическая геометрия в пространстве . . . 159
13.1. Декартова система координат в пространстве. 159
13.2. Уравнения плоскости в пространстве 161
13.3. Уравнения прямой в пространстве 164
13.4. Прямая и плоскость в пространстве 166
13.5. Поверхности второго порядка. 167
13.6. Цилиндрическая и сферическая системы координат. 172
14. Пределы 176
14.1. Предел последовательности 176
14.2. Предел функции 177
15. Производные 181
15.1. Определение и геометрический смысл производной. 181
15.2. Правила дифференцирования и таблица производных. . .183
15.3. Дифференциал и его геометрический смысл. 186
15.4. Производные высших порядков .187
15.5. Производные первого и второго порядка функций, заданных параметрически 188
15.6. Формулы Тейлора и Маклорена .188
15.7. Правило Лопиталя. 189
16. Функции нескольких переменных 190
16.1. Определение функции нескольких переменных 190
16.2. Частные приращения, производные и дифференциалы . .190
16.3. Полное приращение и полный дифференциал 192
16.4. Производные сложных и неявных функций 193
16.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков. 194
16.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 196
17. Первообразная и неопределенный интеграл . . 197
17.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла. 197

17.2. Таблица основных интегралов 198
17.3. Основные методы интегрирования 199
18. Определенный интеграл 209
18.1. Определение и свойства 209
18.2. Основные методы интегрирования 211
18.3. Приложения определенного интеграла 213
18.4. Несобственные интегралы 218
19. Двойной интеграл 222
19.1. Определение и свойства 222
19.2. Приложения 225
20. Тройной интеграл 228
20.1. Определение и свойства 228
20.2. Приложения 230
21. Криволинейные интегралы 234
21.1. Криволинейный интеграл первого рода
(по длине дуги) 234
21.2. Криволинейный интеграл второго рода
(по координатам) 237
22. Поверхностные интегралы 242
22.1. Поверхностный интеграл первого рода
(по площади поверхности) 242
22.2. Поверхностный интеграл второго рода
(по координатам) 246
23. Теория поля 251
23.1. Скалярное поле. Поверхности уровня.
Производная по направлению. Градиент 251
23.2. Векторное поле. Векторные линии и векторные трубки . . .252
23.3. Поток векторного поля. Дивергенция.
Теорема Остроградского—Гаусса 253

23.4. Циркуляция векторного поля. Ротор. Теорема Стокса 257
23.5. Потенциальное и соленоидальное векторные поля 259
23.6. Операторы Гамильтона и Лапласа 261
24. Ряды 265
24.1. Числовые ряды 265
24.2. Функциональные ряды. Степенные ряды 269
24.3. Разложение функций в степенные ряды 272
24.4. Тригонометрические ряды Фурье 273
25. Обыкновенные дифференциальные уравнения 275
25.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка 275
25.2. Основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 276
25.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка 277
25.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка 279
25.5. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка 279
25.6. Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 284
25.7. Система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка 286
26. Теория функций комплексной переменной . . . 288
26.1. Функция комплексной переменной 288
26.2. Дифференцируемость функции комплексной переменной 289
26.3. Интеграл от функции комплексной переменной 291

26.4. Ряд Лорана для функции комплексной переменной 293
26.5. Изолированные особые точки функции комплексной переменной 294
26.6. Вычеты функции комплексной переменной. Теорема Коши о вычетах 296
27. Теория вероятностей 299
27.1. События и операции с ними. 299
27.2. Вероятность события 302
27.3. Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса 305
27.4. Дискретные случайные величины 306
27.5. Некоторые законы распределения дискретных случайных величин 307
27.6. Непрерывные случайные величины 308
27.7. Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин 309

Используемые обозначения

$\varnothing$ — пустое множество, то есть множество, не содержащее ни одного элемента.

$a \in A$ — a принадлежит множеству A.

$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B, то есть все элементы A принадлежат B.

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B, то есть множество, содержащее все элементы A и B.

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B, то есть множество, содержащее только общие элементы А и В.

$A \Rightarrow B$ — из A следует B.

$A \Leftrightarrow B$ — A и B равносильны, то есть $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$\angle$ A — угол A.

$\cup AB$ — дуга AB.

$AB \parallel CD$ — отрезки AB и CD параллельны.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

$AB \perp CD$ — отрезки AB и CD перпендикулярны.

$\vec{a} \perp \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

$(\vec{a}\,^\wedge \vec{b}\,)$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен степени n от x.

$R(x)$ — рациональная функция, то есть функция, для нахождения значения которой нужно произвести только операции сложения, вычитания, умножения и деления.

1. Числовые множества и операции с числами

1.1. Числовые множества

1.1.1. Множество *натуральных* чисел N — множество, элементы которого используются для счета и нумерации объектов: 1, 2, 3, ..., n, ...

1.1.2. Множество *целых* чисел Z — множество, состоящее из всех натуральных чисел, из чисел, противоположных натуральным, и числа ноль: ..., –2, –1, 0, 1, 2, ...

1.1.3. Множество *рациональных* чисел Q — множество, состоящее из чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Каждое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

1.1.4. Множество *иррациональных* чисел — множество, состоящее из чисел, представимых в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

1.1.5. Множество *действительных* чисел R — множество, состоящее из всех рациональных и иррациональных чисел.

1.1.6. Множество *комплексных* чисел C — множество упорядоченных пар действительных чисел $(a;\ b)$, для которых определены

- *равенство*:

$$(a_1;b_1)=(a_2;b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2;b_1=b_2\,,$$

- *сложение*:

$$(a_1;b_1)+(a_2;b_2)=(a_1+a_2;b_1+b_2)\,,$$

- *умножение*:

$$(a_1;b_1)\cdot(a_2;b_2)=(a_1a_2-b_1b_2;a_1b_2+a_2b_1)\,.$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа: $a + bi$, где $i = (0;\ 1)$ — *мнимая единица*; $i^2=(-1;0)=-1$.

Примеры.

- *Рациональные* числа:

$$-4\frac{7}{40}=-\frac{167}{40}=-4{,}175\,;\ 0;\ \frac{5}{9}=0{,}55\ldots=0{,}(5)\,;$$

$$2\frac{4}{11}=\frac{26}{11}=2{,}3636\ldots=2{,}(36)\,;\ 3\frac{16}{25}=3{,}64\,.$$

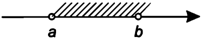
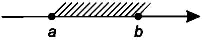
- *Иррациональные* числа:

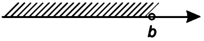
$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots;\ \log_3 5 = 1{,}4649\ldots;\ \pi = 3{,}1415\ldots$$

- *Комплексные* числа:

$$2 - 5i;\ -5{,}76 + 8{,}53i;\ 1 - \sqrt{2}i;\ \sqrt{7} + \sqrt[3]{5}i.$$

1.2. Числовые промежутки

№	Название	Обозначение	Запись в виде неравенства	Изображение
1	Открытый промежуток (интервал)	(a, b)	$a < x < b$	
2	Замкнутый промежуток (отрезок)	$[a, b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	

№	Название	Обозначение	Запись в виде неравенства	Изображение
3	Полуоткрытые промежутки	$(a, b]$ $[a, b)$	$a < x \leqslant b$ $a \leqslant x < b$	
4	Бесконечные промежутки	$(a, +\infty)$	$a < x < +\infty$	
		$[a, +\infty)$	$a \leqslant x < +\infty$	
		$(-\infty, b)$	$-\infty < x < b$	
		$(-\infty, b]$	$-\infty < x \leqslant b$	
		$(-\infty, \infty) = R$	$-\infty < x < \infty$	

1.3. Признаки делимости

Число делится на **2**, если его последняя цифра четная, то есть делится на 2.

Число делится на **3**, если сумма всех его цифр делится на 3.

Число делится на **4**, если его две последние цифры образуют число, делящееся на 4.

Число делится на **5**, если его запись оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

Число делится на **6**, если оно делится на 2 и на 3.

Число делится на **10**, если его последняя цифра 0.

Число делится на $\mathbf{10}^n$, если n его последних цифр нули.

1.4. Арифметические операции с действительными числами

Арифметические операции с действительными числами — *сложение*, *умножение*, *вычитание* и *деление*. В таблице даны основные свойства сложения и умножения.

№	Свойства сложения	№	Свойства умножения
1	Коммутативное: $a + b = b + a$	1	Коммутативное: $a \times b = b \times a$
2	Ассоциативное: $(a + b) + c = a + (b + c)$	2	Ассоциативное: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3	Дистрибутивное свойство умножения относительно сложения: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$		

№	Свойства сложения	№	Свойства умножения
4	$a + 0 = a$	4	$a \times 1 = a$
5	$a + (-a) = 0$ a и $-a$ — противоположные числа	5	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $a \neq 0$ a и $\frac{1}{a}$ — обратные числа
	$a, b, c \in R$		$a, b, c \in R$

Вычитание — сложение с противоположным числом:

$$a - b = a + (-b);$$

Деление — умножение на обратное число:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \text{ при } b \neq 0.$$

1.5. Модуль действительного числа

Модуль (абсолютная величина) действительного числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Свойства модуля:

1) $|a| \geq 0$;
2) $|-a| = |a|$;
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ при $b \neq 0$;
5) $|a^n| = |a|^n$, где $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n \in N$, $n > 1$;
6) $|a^{2n}| = |a|^{2n} = a^{2n}$;
7) $|a + b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in R$.

Примеры:

$$|0| = 0;\ |-11| = |11| = 11;\ |(-2) \cdot 3 \cdot (-5) : (-6)| = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5;$$
$$|(-2)^3| = 2^3 = 8.$$

1.6. Арифметические операции с обыкновенными дробями

1.6.1. *Обыкновенные дроби* — числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Если $m \geq n$, то дробь *неправильная*, если $m < n$, то дробь *правильная* ($m, n \in N$). Если дробь неправильная, то можно выделить ее целую часть.

Пример:

$$\frac{98}{17}=\frac{85+13}{17}=5\frac{13}{17}.$$

1.6.2. *Сокращение* дроби: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

Пример:

$$\frac{24}{32}=\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}=\frac{3}{4}.$$

1.6.3. *Сложение* дробей.

1. Знаменатели не имеют общих множителей:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\;\; b\neq 0, d\neq 0;$$

2. Знаменатели имеют общий множитель k:

$$\frac{a}{bk}+\frac{c}{dk}=\frac{ad+bc}{bdk},\;\; b\neq 0, d\neq 0, k\neq 0.$$

Примеры:

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{9}=\frac{2\cdot 9+4\cdot 7}{7\cdot 9}=\frac{18+28}{63}=\frac{46}{63};$$

$$\frac{11}{24}+\frac{27}{40}=\frac{11}{3\cdot 8}+\frac{27}{5\cdot 8}=\frac{11\cdot 5+27\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 8}=$$

$$=\frac{55+81}{120}=\frac{136}{120}=\frac{17\cdot 8}{15\cdot 8}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}.$$

1.6.4. *Умножение* дробей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 .$$

Пример:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{2}{3} .$$

1.6.5. *Деление* дробей:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0 .$$

Примеры:

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}; \ \frac{8}{15} : 4 = \frac{8}{15 \cdot 4} = \frac{2}{15};$$

$$4 : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 .$$

1.7. Связь между десятичными и обыкновенными дробями

Десятичная дробь — обыкновенная дробь, знаменатель которой представляет собой степень числа 10, то есть $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n}$, а числитель — любое целое число. Любую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.

Пример:

$$0,325 = \frac{325}{1000} = \frac{13 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{13}{40}.$$

Обыкновенную дробь можно представить в виде *конечной* десятичной дроби тогда и только тогда, когда ее знаменатель раскладывается на простые множители, состоящие только из чисел 2 или 5. В противном случае обыкновенную дробь можно представить в виде *бесконечной периодической* десятичной дроби.

Примеры:

1) $\frac{9}{40} = \frac{9}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{225}{1000} = 0,225;$

2) $\frac{19}{60} = \frac{19}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 0,31666\ldots = 0,31(6)$ (число в скобках — период десятичной дроби).

1.8. Операция возведения в степень

Определение степени действительного числа a:

№	Название	Формула
1	Степень с натуральным показателем	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n \in N$

Продолжение ▸

(Продолжение)

№	Название	Формула
2	Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1,\ a \neq 0$
3	Степень с целым отрицательным показателем	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $,a \neq 0,\ n \in N$
4	Корень n-й степени из числа a	1) $a > 0 \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} > 0,\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$ $n \in N;\ n > 1$ 2) $a = 0\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} = 0,\ n \in N;$ 3) $a < 0\ \Rightarrow\ n = 2k - 1,\ k \in N,$ $\sqrt[2k-1]{a} < 0,\ \left(\sqrt[2k-1]{a}\right)^{2k-1} = a$
5	Степень с рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m} = \sqrt[n]{a^m},\ a \geq 0,$ $m, n \in N,\ n > 1$
6	Степень с иррациональным показателем	1) $a = 1$. Если ω — иррациональное число, тогда $a^{\omega} = 1$; 2) $a > 1$. Если ω такое иррациональное число, что $p < \omega < q$, то a^{ω} — такое число, что $a^p < a^{\omega} < a^q,\ a \in R,\ p, q \in Q;$

№	Название	Формула
		3) $0 < a < 1$. Если ω такое иррациональное число, что $p < \omega < q$, то a^ω — такое число, что $a^q < a^\omega < a^p$, $a \in R$, $p, q \in Q$

Примеры:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{81};\ 783^0 = 1;$$

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};\ \sqrt[3]{125} = 5;$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2};\ 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4;$$

$$16^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{16}\right)^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

Свойства степеней ($a, b, p, q \in R,\ a > 0, b > 0$):

1) $a^p \cdot b^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : b^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{pq}$;

4) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$;

5) $a^p : b^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p$.

1.9. Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$;
4) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
6) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
9) $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$;
10) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Примеры:

$$355^2 - 345^2 = (355 - 345) \cdot (355 + 345) = \\ = 10 \cdot 700 = 7000;$$

$$13^3 = (10+3)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 \cdot 3^2 + \\ + 3^3 = 1000 + 900 + 270 + 27 = 2197.$$

1.10. Арифметические операции с корнями

1.10.1. Корень n-й степени из неотрицательного числа a — неотрицательное число $\sqrt[n]{a}$, которое при возведении в степень n дает a, то есть $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Выражения вида $\sqrt[n]{a}$, где $n \in N, n > 1,\ a \geq 0$, называют корнями (символ $\sqrt[n]{\ }$ — *радикал*).

1.10.2. *Умножение* корней:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2b^3}$,

$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{bc} + \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$ — почленное умножение, $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$.

1.10.3. *Деление* на некоторые выражения, содержащие корни:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, $a > 0$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$, $a > 0$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$,

$a > 0, b > 0$, $a \neq b$;

4) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b},\ a>0, b>0,\ a\neq b.$$

Примеры:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{18}+\sqrt{12})=\sqrt{54}-\sqrt{36}+\sqrt{36}-$
$-\sqrt{24}=\sqrt{54}-\sqrt{24}=\sqrt{9\cdot 6}-\sqrt{4\cdot 6}=3\sqrt{6}-$
$-2\sqrt{6}=\sqrt{6};$

2) $$\frac{6}{\sqrt[3]{2}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}=3\sqrt[3]{4};$$

3) $$\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}=\frac{4\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{7})}=$$
$$=\frac{4\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{11-7}=\sqrt{11}+\sqrt{7}.$$

1.10. 4. *Свойства* корней

1) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=$
$=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m};$

2) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{mk}};$

3) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab};$

4) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};$

5) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m b^n}$; 6) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$;

7) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$; 8) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Примеры:

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{16\cdot 8}=\sqrt[6]{2^7}=\sqrt[6]{2^6\cdot 2}=2\sqrt[6]{2};$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt{2}.$$

1.11. Операции с комплексными числами

1.11.1. *Алгебраическая* форма комплексного числа: $z=x+yi$, где $x=\operatorname{Re}z$ — действительная часть, $y=\operatorname{Im}z$ — мнимая часть комплексного числа, $x, y\in R$, i — мнимая единица ($i^2=-1$).

Комплексно сопряженное число к числу z:

$$\overline{z}=x-yi.$$

Свойства z и $\overline{z}$:

$$z+\overline{z}=2x,\ z\cdot\overline{z}=x^2+y^2.$$

Сложение и вычитание:

$$(x_1+y_1 i)\pm(x_2+y_2 i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i.$$

Умножение:

$$(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Деление:

$$(x_1 + y_1 i) : (x_2 + y_2 i) = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} =$$

$$= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} +$$

$$+ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Примеры:

1) $(1 + 2i)\cdot(4 - 3i) = 4 + 8i - 3i - 6i^2 =$
$= 4 + 5i + 6 = 10 + 5i;$

2) $(4 - 3i) : (1 + 2i) = \dfrac{4 - 3i}{1 + 2i} = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} =$
$= \dfrac{4 - 3i - 8i + 6i^2}{1 + 4} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{11}{5} i = -0,4 - 2,2i.$

1.11.2. *Тригонометрическая* форма комплексного числа:

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — модуль, φ — аргумент комплексного числа, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq 0)$, $-\pi\leq\varphi\leq\pi$ или $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Для однозначного определения аргумента необходимо учитывать знаки x и y.

Если $x = 0$, $y > 0$, то $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$; если $x = 0$, $y < 0$, то $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$; если $x > 0$, $y = 0$, то $\varphi=0$; если $x < 0$, $y = 0$, то $\varphi=\pi$.

Умножение:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Деление:

$$z_1:z_2=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

при $z_2\neq 0$.

Возведение в натуральную степень:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$ — формула *Муавра*.

Извлечение корня натуральной степени:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=$$

$$=0,1,\ldots,n-1.$$

Примеры:

1) $z=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$

2) $z^4=(-1+i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\cdot 3\pi}{4}+i\sin\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right)=$

$=4(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-4;$

3) $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(\cos\pi+i\sin\pi)}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+$

$+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},$

$k=0\Rightarrow z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$k=1\Rightarrow z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$

$k=2\Rightarrow z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

1.11.3. *Показательная* форма комплексного числа:

$$z=x+yi=re^{\varphi i}\text{, где }e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Умножение:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}.$$

Деление:

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}, \; z_2 \neq 0 .$$

Возведение в натуральную степень:

$$z^n = r^n e^{n\varphi i}$$

Извлечение корня натуральной степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Примеры:

1) $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$
$= 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

2) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6 = 2^6 \left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^6 = 64e^{-2\pi i} = 64$;

3) $\sqrt{4i} = \sqrt{4e^{\frac{\pi}{2}i}} = \sqrt{4} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$,

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i ,$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i .$$

Степени числа i: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = 1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и т. д.

1.12. Пропорции и средние значения

Пропорция:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ (b\neq 0,\ d\neq 0).$$

Свойства:

1) $ad = bc$;

2) $\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$.

Среднее квадратическое:

$$a_{квад.}=\sqrt{\frac{1}{n}\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Среднее арифметическое:

$$a_{ариф.}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Среднее геометрическое:

$$a_{геом.}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},\ a_i>0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Среднее гармоническое:

$$a_{гарм.}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},\ a_i>0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Примеры:

$$a_{квад.}(2;18)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(2^2+18^2\right)}=\sqrt{164}\approx 12{,}8\,;$$

$$a_{ариф.}(2;18)=\frac{2+18}{2}=10\,;$$

$$a_{геом.}(2;18)=\sqrt{2\cdot 18}=6\,;$$

$$a_{гарм.}(2;18)=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{18}}=3{,}6\,.$$

1.13. Некоторые числовые суммы ($n\in N$)

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)=n^2$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

6) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

7) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

8) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$.

1.14. Числовые неравенства

1.14.1. Числовое неравенство — отношение, связывающее два числа a и b посредством одного из знаков: $<$ (меньше); $\leq$ (меньше или равно); $>$ (больше); $\geq$ (больше или равно).

1.14.2. *Свойства* числовых неравенств:

1) $a > b \Leftrightarrow b < a$;
2) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
3) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;
4) $a > b, c > 0 \Leftrightarrow ac > bc$;
5) $a > b, c < 0 \Leftrightarrow ac < bc$;
6) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$;
7) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;
8) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$;

9) $a > b > 0 \Leftrightarrow a^{-1} < b^{-1}$;

10) $a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, n \in N, n \neq 1$.

1.14.3. Некоторые *важные* неравенства:

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \ a + \frac{1}{a} \geq 2, \ a > 0;$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$$

при $a > 0$, $b > 0$.

1.15. Логарифмы

1.15.1. *Логарифм* числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) – показатель c степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b: $a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b$.

1.15.2. *Свойства* логарифмов:

1) $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

2) $\log_a a^c = c$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

3) $\log_a 1 = 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

4) $\log_a a = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$);

5) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$;

6) $\log_a(b:c) = \log_a b - \log_a c$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$;

7) $\log_a b^p = p\log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$;

8) $\log_a b^{2n} = 2n\log_a |b|$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0)$;

9) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0)$;

10) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$;

11) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p}\log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ p \neq 0)$;

12) $\log_{a^p} b^q = \dfrac{q}{p}\log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ p \neq 0)$.

1.14.3. *Десятичный* логарифм:

$$\lg b = \log_{10} b.$$

Натуральный логарифм:

$$\ln b = \log_e b,\ \text{где } e = 2{,}71828\ldots\ .$$

Примеры:

1) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \log_3 3^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}$;

2) $2 \lg 5 + 0{,}5 \lg 16 = \lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$;

3) $4^{\log_2 3} = 4^{2 \log_4 3} = 4^{\log_4 3^2} = 3^2 = 9$.

2. Комбинаторика и бином Ньютона

2.1. Комбинаторика

Комбинаторика — раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с определенными правилами.

2.1.1. *Перестановки* из n элементов — упорядоченные множества, составленные из *всех* n элементов конечного множества.

Число перестановок из n элементов:

$$P_n = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$
$$\text{при } n \in N,\ n > 1.$$

По определению $0! = 1$, $1! = 1$.

Свойство $n!$:

$$n! = (n-1)!n,\ n \in N.$$

Формула *Стирлинга*:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}n^n e^{-n}.$$

Пример:

$$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

2.1.2. *Размещения* из n элементов по m — упорядоченные множества, составленные из m элементов конечного множества, состоящего из n элементов. *Число* размещений из n по m *без повторений* элементов:

$$A_n^m = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

$$m, n \in N, m \le n, \ A_n^0 = 1.$$

Свойство:

$$A_n^n = P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Число размещений из n по m *с повторениями* элементов:

$$\tilde{A}_n^m = n^m, \ m, n \in N.$$

Примеры:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60\ ;\ \tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125\,.$$

2.1.3. *Сочетания* из n элементов по m — неупорядоченные множества, составленные из m элементов конечного множества, состоящего из n элементов.

Число сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!},\quad m,n \in N\,,\ m \le n\,,\ C_n^0 = 1\,.$$

Свойства:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^n = 1$;

3) $C_n^1 = n$.

Пример:

$$C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\,.$$

2.2. Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m =$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n\,,\ n \in N, n \ge 2\,.$$

Здесь C_n^m — *биномиальные* коэффициенты.

Примеры:

1) $(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + b^4 =$

$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$;

2) $(a+b)^5 = a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 +$

$+C_5^4 ab^4 + b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 +$

$+5ab^4 + b^5$.

3. Алгебраические уравнения и неравенства

3.1. Уравнения и неравенства первой степени

3.1.1. Уравнение *первой* степени:

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \text{ при } a \neq 0.$$

3.1.2. *Система* двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$$

$$\text{при } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

3.1.3. *Неравенство* первой степени:

$$ax > b \overset{a>0}{\Leftrightarrow} x > \frac{b}{a}; \; ax > b \overset{a<0}{\Leftrightarrow} x < \frac{b}{a}.$$

3.1.4. *Система* неравенств первой степени:

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \overset{a>b}{\Leftrightarrow} x > a\,; \quad \begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \overset{b>a}{\Leftrightarrow} x > b\,;$$

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \overset{b>a}{\Leftrightarrow} a < x < b\,;$$

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \overset{a>b}{\Leftrightarrow} \ x \in \varnothing\,; \quad \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \overset{a>b}{\Leftrightarrow} x < b\,;$$

$$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \overset{b>a}{\Leftrightarrow} x < a\,.$$

3.2. Уравнения и неравенства второй степени

3.2.1. Уравнение *второй* степени (*квадратное*):

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{квадратный трехчлен}} = 0 \text{ при } a \neq 0\,.$$

Дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac\,.$$

Корни:

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

$$D > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in R,\ x_1 \neq x_2;$$

$$D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} -$$

действительный корень кратности 2;

$$D < 0 \Rightarrow\ x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} -$$

комплексно сопряженные корни.

Разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ \text{при}\ x_1 \neq x_2;$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2\ \text{при}\ x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Теорема Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + px + q = 0,\ D = p^2 - 4q,\ x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2};$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Неполные квадратные уравнения:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0,$$

$$\text{корни: } x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}\ \ (a \neq 0).$$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c,$$

$$\text{корни: } x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ \ (a \neq 0).$$

Примеры:

$$6x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49,$$

$$x_{1,\,2} = \frac{-1 \pm 7}{12},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{2}{3};$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow D = 4 - 4 \cdot 5 =$$

$$= -16,\ x_{1,\,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

3.2.2. Неравенство *второй* степени (*квадратное*):

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ при } a \neq 0.$$

$$D > 0,\ a > 0,\ x_1 < x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.;$$

$$D > 0,\ a < 0,\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x < x_2;$$

$$D = 0,\ a > 0,\ x_1 = x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_1 \end{array}\right.;$$

$$D = 0, a < 0, \Rightarrow x \in \varnothing;$$
$$D < 0, a > 0 \Rightarrow x \in R; \ D < 0, a < 0 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

3.3. Уравнение третьей степени

Уравнение *третьей* степени (*кубическое*):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ при } a \neq 0.$$

Как правило, кубическое уравнение решается *разложением* на множители. *Пример*:

$$4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x - 2) - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 0,5 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

3.4. Уравнение четвертой степени

Уравнение *четвертой* степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ при } a \neq 0.$$

Биквадратное уравнение:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ при } a \neq 0.$$

Замена переменной $y = x^2$ приводит биквадратное уравнение к квадратному $ay^2 + by + c = 0$. Корни биквадратного уравнения:

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}},$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

Пример:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0, \quad y = x^2, \quad y^2 - 7y + 12 = 0,$$

$$D = 49 - 48 = 1,$$

$$y_1 = 3, y_2 = 4, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, x_{3,4} = \pm 2.$$

3.5. Уравнение n-й степени

Уравнение n-й степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Частные случаи:

1) $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Здесь $\varphi_0 = 0$, если $a \geq 0$, $\varphi_0 = \pi$, если $a < 0$.

2) $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$. Замена переменной $y = x^n$ приводит данное уравнение к квадратному $ay^2 + by + c = 0$.

4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

4.1. Показательные уравнения и неравенства

4.1.1. *Показательное* уравнение:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ при } a > 0, a \neq 1.$$

4.1.2. *Показательное* неравенство:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) < g(x).$$

Примеры:

1) $5^{x+1} = 5^{3-x} \Leftrightarrow x + 1 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$;
2) $0,1^{2x-3} > 0,1^{x} \Leftrightarrow 2x - 3 < x \Leftrightarrow x < 3$.

4.2. Логарифмические уравнения и неравенства

4.2.1. *Логарифмические уравнения*:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \text{при } a > 0, a \neq 1;$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \end{cases}$$

при $a > 0, a \neq 1$.

4.2.2. *Логарифмические неравенства*:

$$\log_a f(x) > b \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > a^b;$$

$$\log_a f(x) > b \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} 0 < f(x) < a^b;$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > g(x) > 0;$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} 0 < f(x) < g(x).$$

Примеры:

1) $\lg(3x+4)=2 \Leftrightarrow 3x+4=100 \Leftrightarrow$
$3x=96 \Leftrightarrow x=32$;

2) $\log_{0,1}(5-x) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \leq 0,1^{-2} \\ 5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -95 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow -95 \leq x < 5$.

5. Последовательности и прогрессии

5.1. Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*; a_n — n-й член последовательности.
Примеры:

$$a_n = 2n - 7\,;\; a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5^{n-1}}\,;\; a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\,;$$

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}\,.$$

5.2. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность, первый член которой равен a_1, а каждый следующий равен предыдущему, сложенному

с некоторым постоянным числом d — разностью прогрессии: $a_n = a_{n-1} + d, n > 1$.
n-й член прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}),\ n \geq 2.$$

Сумма первых n членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Пример: если n-й член прогрессии $a_n = 2n - 7$, то $a_1 = -5$, $d = 2$, $S_{10} = (-10 + 18) \times 5 = 40$.

5.3. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность, первый член которой равен b_1, а каждый следующий равен предыдущему, умноженному на некоторое число $q \neq 0$ — знаменатель прогрессии: $b_n = b_{n-1}\, q, n > 1$.
n-й член прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1},\ n \geq 2.$$

Сумма первых n членов:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

при $q \neq 1$, $S_n = nb_1$ при $q = 1$.

Пример: если n-й член прогрессии $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, то $b_1 = 3$, $q = 2$, $S_4 = 3\frac{(1-16)}{(1-2)} = 45$.

5.4. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия — геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$.

Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример: если n-й член прогрессии $b_n = \dfrac{3 \cdot 2^{n-1}}{5^{n-1}}$, то $b_1 = 3$, $q = 0{,}4$, $S = \dfrac{3}{1-0{,}4} = 5$.

6. Функции и их графики

6.1. Определение и основные характеристики функции

6.1.1. Если каждому числу x из множества X ставится в соответствие единственное число y из множества Y, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$; x — аргумент, y — функция.

6.1.2. *Область определения* функции D_f — множество тех значений аргумента x, при которых $f(x)$ имеет смысл.

Область значений функции E_f — множество всех значений, которые принимает функция $y = f(x)$, если $x \in D_f$.

6.1.3. Функция $f(x)$ — *четная*, если $f(-x) = f(x)$ при $x, -x \in D_f$.

Функция $f(x)$ — *нечетная*, если $f(-x) = -f(x)$ при $x, -x \in D_f$.

6.1.4. Функция $f(x)$ — *возрастающая* (*неубывающая*) на $[a; b]$, если $f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) \geq f(x_1)\right)$, где $x_1, x_2 \in [a; b]$, $x_2 > x_1$.

Функция $f(x)$ — *убывающая* (*невозрастающая*) на $[a;\, b]$, если $f(x_2) < f(x_1)$ $\left(f(x_2) \le f(x_1)\right)$, где $x_1, x_2 \in [a;\, b]$, $x_2 > x_1$.

Возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая на $[a;\, b]$ функции называются *монотонными* на $[a;\, b]$. Аналогично определяются функции, монотонные на $(a;\, b)$.

6.1.5. *Прямоугольная декартова* система координат на плоскости — две взаимно перпендикулярные числовые оси с единым началом — точкой O и выбранным масштабом (рис. 6.1). Ось Ox — ось *абсцисс*, ось Oy — ось *ординат*.

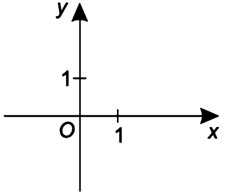
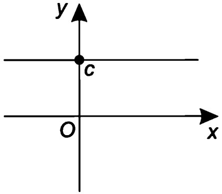
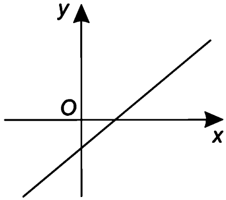
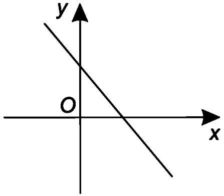
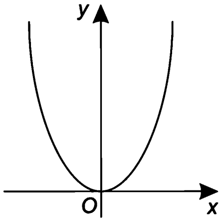
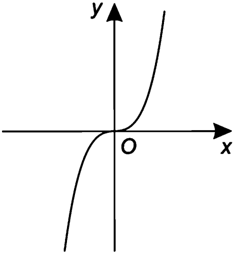
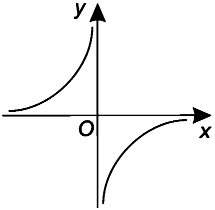


Рис. 6.1

6.1.6. *График* функции $f(x)$ — множество точек координатной плоскости $\left(x;\, f(x)\right)$, где $x \in D_f$, $f(x) \in E_f$.

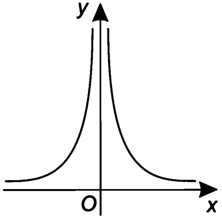
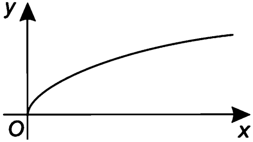
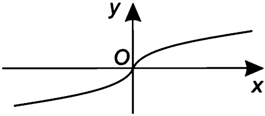
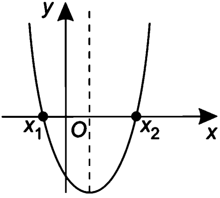
6.2. Графики некоторых функций

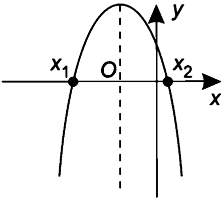
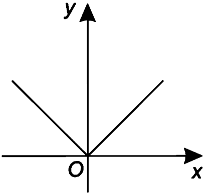
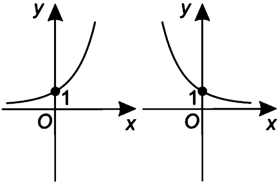
№	Название	Формула	График
1	Постоянная	$y = c$	
2	Линейная	$y = kx + b$ $(k \neq 0)$	 $k > 0$  $k < 0$

№	**Название**	**Формула**	**График**
3	Степенная	$y = x^2$	
4	Степенная	$y = x^3$	
5	Степенная	$y = x^{-1} (x \neq 0)$	

Продолжение ▸

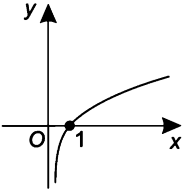
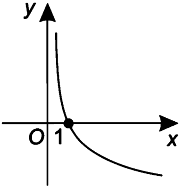
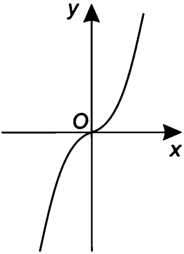
(Продолжение)

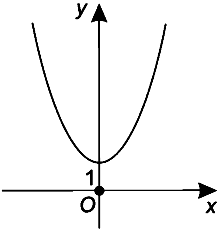
№	Название	Формула	График
6	Степенная	$y = x^{-2}$ ($x \neq 0$)	
7	Степенная	$y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)	
8	Степенная	$y = \sqrt[3]{x}$	
9	Квадратичная	$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)	

№	Название	Формула	График
			 $a < 0$
10	Модуль	$y = \lvert x \rvert$	
11	Показа-тельная	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	 $a > 1$ $0 < a < 1$

Продолжение ▸

(Продолжение)

№	Название	Формула	График
12	Логарифмическая	$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$	 $a > 1$  $0 < a < 1$
13	Гиперболический синус	$y = \mathrm{sh}x =$ $= 0{,}5(e^x - e^{-x})$	

№	Название	Формула	График
14	Гиперболический косинус	$y = \mathrm{ch}x =$ $= 0{,}5(e^x + e^{-x})$	

7. Тригонометрия

7.1. Градусная и радианная меры углов

Если α°— мера угла, выраженная в градусах, а $\alpha_{рад}$ — мера того же угла, выраженная в радианах, то $\alpha^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)\alpha_{рад}$, $\alpha_{рад} = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)\alpha^\circ$.

$$1^\circ = \left(\frac{2\pi}{360}\right) рад = \left(\frac{\pi}{180}\right) рад \approx 0,017463;$$

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Примеры:

1) $75^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 75^\circ\right) рад = \frac{5\pi}{12}$;

2) $\frac{13\pi}{12} рад = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{13\pi}{12}\right)^\circ = 195^\circ$.

Замечание. Обозначение «рад» по умолчанию опускается.

7.2. Тригонометрическая окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α

7.2.1. *Тригонометрическая* (или *единичная*) окружность — окружность радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 7.1). Углы, отложенные поворотом против часовой стрелки, — *положительные*; углы, отложенные поворотом по часовой стрелке, — *отрицательные*.

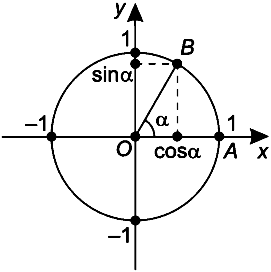


Рис. 7.1

7.2.2. *Синус* угла α ($\sin\alpha$) — ордината точки B радиуса OB, полученного поворотом начального радиуса OA на угол α (см. рис. 7.1), $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

Косинус угла α (cos α) — абсцисса точки *B* радиуса *OB*, полученного поворотом начального радиуса *OA* на угол α (см. рис. 7.1), $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Тангенс угла α (tg α) — отношение sin α к cos α, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при $\alpha \neq (\pi/2) + n\pi$, $n \in Z$.

Котангенс угла α (ctg α) — отношение cos α к sin α, то есть $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при $\alpha \neq n\pi$, $n \in Z$.

7.2.3. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям:

Четверть	I	II	III	IV
sin α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tg α	+	–	+	–
ctg α	+	–	+	–

7.2.4. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов α при условии, что $0 \leq \alpha \leq 180°$:

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не опр.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	Не опр.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не опр.

7.3. Формулы приведения

α	$-\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

$$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + n\pi) = \mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(\alpha + n\pi) = \mathrm{ctg}\,\alpha,\ n \in Z.$$

7.4. Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{array}\right.;$

2) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha};\ \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$

3) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \ \Leftrightarrow\ \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}};$

4) $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \ \Leftrightarrow\ \sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}.$

Знак «+» или «–» перед корнями выбирается в зависимости от того, в какой четверти лежит радиус, ограничивающий угол.

Пример: Дано: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{12}{5},$$

$$\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = -\frac{12}{13},$$

$$\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

7.5. Формулы двойного, тройного и половинного аргументов

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
3) $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;
4) $\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$;

5) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

6) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

7) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

8) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

9) $\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$;

10) $\mathrm{ctg}3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$;

11) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$;

12) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$;

13) $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

14) $\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$;

15) $\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

16) $\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Пример. Упростите выражение $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

7.6. Формулы сложения

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$;
2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$;
3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$;
4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$;
5) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;
6) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

7.7. Формулы преобразования суммы в произведение

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6) $\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

7) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha =$
$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

8) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha =$
$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

7.8. Формулы преобразования произведения в сумму

1) $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;

2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;

3) $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$;

4) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$.

7.9. Степени синуса и косинуса

1) $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$;

2) $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$;

3) $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$;

4) $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$;

5) $\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3)$;

6) $\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3)$.

7.10. Обратные тригонометрические функции и тригонометрические уравнения

7.10.1. Обратные тригонометрические функции.
Арксинус числа a ($\arcsin a$) при $|a| \le 1$ — число $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, то есть $\sin\varphi = a$, $\varphi = \arcsin a$.
Свойства:

$$\sin(\arcsin a) = a; \ \arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Арккосинус числа a ($\arccos a$) при $|a| \le 1$ — число $\varphi \in [0; \pi]$, косинус которого равен a, то есть $\cos\varphi = a$, $\varphi = \arccos a$.
Свойства:

$$\cos(\arccos a) = a; \ \arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Арктангенс числа a ($\operatorname{arctg} a$) — число $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, то есть $\operatorname{tg}\varphi = a$, $\varphi = \operatorname{arctg} a$.

Свойства:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a;\ \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

Арккотангенс числа a ($\operatorname{arcctg} a$) — число $\varphi \in (0;\pi)$, котангенс которого равен a, то есть $\operatorname{ctg}\varphi = a$, $\varphi = \operatorname{arcctg} a$.

Свойства:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a;\ \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ — *обратные* тригонометрические функции.

Примеры:

1) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$;

2) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$;

3) $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\dfrac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

7.10.2. Тригонометрические уравнения

1) $\sin x = a$, $|a| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$, $n \in Z$.

Частные случаи:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n \in Z$;

$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$;

2) $\cos x = a$, $|a| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi$, $n \in Z$.

Частные случаи:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$;

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi$, $n \in Z$;

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi$, $n \in Z$;

3) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + n\pi$, $n \in Z$.

Частный случай: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n \in Z$;

4) $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + n\pi$, $n \in Z$.

Частный случай: $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$.

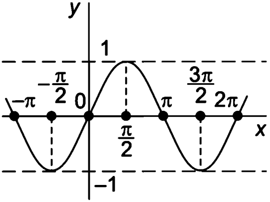
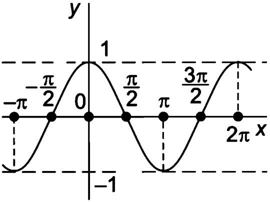
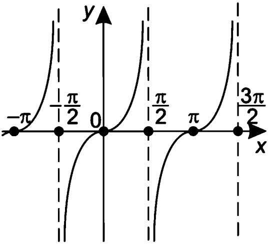
Пример:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + n\pi =$$

$$= (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi =$$

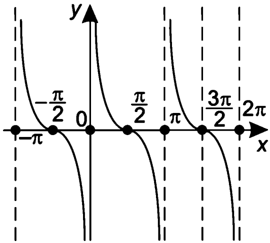
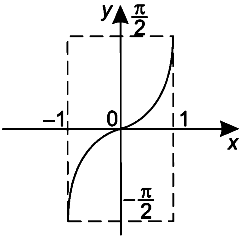
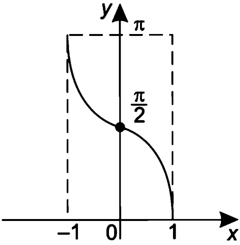
$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi , \ n \in Z.$$

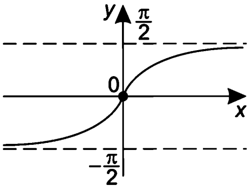
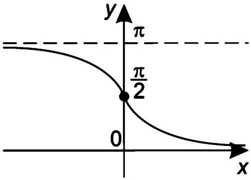
7.11. Графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций

№	Функция	График
1	$y = \sin x$	
2	$y = \cos x$	
3	$y = \operatorname{tg} x$	

Продолжение ▸

(Продолжение)

№	Функция	График
4	$y = \operatorname{ctg} x$	
5	$y = \arcsin x$	
6	$y = \arccos x$	

№	Функция	График
7	$y = \text{arctg}\, x$	
8	$y = \text{arcctg}\, x$	

8. Планиметрия

8.1. Треугольники

8.1.1. *Многоугольник* (*n-угольник*) — замкнутая ломаная без самопересечений, состоящая из n отрезков и n ограничивающих их точек, вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею. Отрезки — *стороны*, точки — *вершины* многоугольника.

Если многоугольник расположен в одной полуплоскости от любой прямой, содержащей его сторону, то он *выпуклый*.

8.1.2. *Треугольник* — многоугольник, имеющий три стороны и три вершины (рис. 8.1). Обозначение: $\triangle ABC$.

Стороны: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Периметр: $P = AB + BC + AC$.

Полупериметр: $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

Углы: $\angle A, \angle B, \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Высоты: $AK = h_a$, $BL = h_b$, $CM = h_c$ ($AK \perp BC$, $BL \perp AC$, $CM \perp AB$).

$\triangle ABC$ — *равнобедренный*, если $AB = BC$.

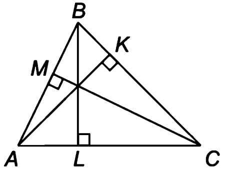


Рис. 8.1

8.1.3. Теорема *синусов*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Теорема *косинусов*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

8.1.4. Соотношения между функциями углов треугольника

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

2) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$;

3) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\cos A\cos B\cos C+2$;

4) $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C$.

Здесь $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника; $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

8.1.5. *Площадь* треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A;$$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

$S=pr$, где r — радиус вписанной окружности;

$S=\frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности;

$$S=2R^2\sin A\,\sin B\,\sin C.$$

8.1.6. *Прямоугольный* треугольник — $\triangle ABC$, у которого один из углов прямой (на рис. 8.2

$\angle C = 90°$); $BC = a$, $AC = b$ — катеты, $AB = c$ — гипотенуза.

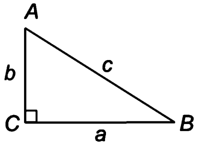


Рис. 8.2

Теорема *Пифагора*:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Функции острого угла:

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab\,,\ S = \frac{1}{2}ch_c\,.$$

8.1.7. ***Равносторонний*** (правильный) треугольник — $\triangle ABC$, у которого равны стороны (рис. 8.3): $AB = BC = AC = a$. При этом $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $h_a = h_b = h_c = h$; $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

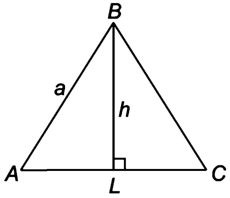


Рис. 8.3

Площадь:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S=\frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$$

8.2. Четырехугольники

8.2.1. *Выпуклый четырехугольник* — выпуклый многоугольник, имеющий четыре стороны и четыре вершины (рис. 8.4).

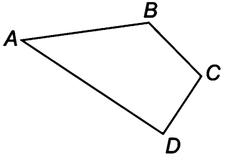


Рис. 8.4

Сумма углов выпуклого четырехугольника:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

8.2.2. *Параллелограмм* — четырехугольник $ABCD$, у которого $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ (рис. 8.5).

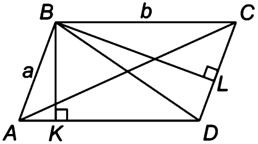


Рис. 8.5

Стороны:

$$AB = DC = a,\ BC = AD = b\ (AB \parallel DC,\ BC \parallel AD).$$

Высоты:

$$BL = h_a,$$
$$BK = h_b\ (BL \perp DC, BK \perp AD).$$

Диагонали:

$$AC = d_1,\ BD = d_2.$$

Связь между сторонами и диагоналями:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Площадь:

$$S = ah_a = bh_b;\ S = ab\sin A,\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где φ — угол между диагоналями.

8.2.3. *Прямоугольник* — параллелограмм $ABCD$, у которого $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ (рис. 8.6).

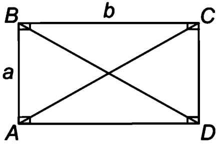


Рис. 8.6

Диагонали:

$$d_1 = d_2 = d.$$

Связь между сторонами и диагоналями:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь:

$$S = ab.$$

8.2.4. *Ромб* — параллелограмм, у которого $AB = BC = CD = DA = a$ (рис. 8.7).

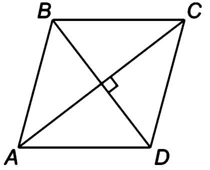


Рис. 8.7

Диагонали:

$$AC = d_1,\ BD = d_2.$$

$$AC \perp BD.$$

Связь между сторонами и диагоналями:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Площадь:

$$S = a^2 \sin A,\ S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

8.2.5. *Квадрат* — прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = BC = CD = DA = a$ (рис. 8.8).

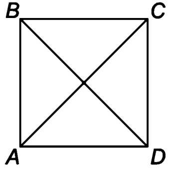


Рис. 8.8

Диагонали:

$$AC \perp BD,\ AC = BD = d.$$

Связь между стороной и диагональю:

$$a = d\frac{\sqrt{2}}{2},\ d = a\sqrt{2}.$$

Площадь:

$$S = a^2,\ S = \frac{1}{2}d^2.$$

8.2.6. *Трапеция* — четырехугольник $ABCD$, у которого $BC \parallel AD$, $AB \nparallel DC$ (рис. 8.9).

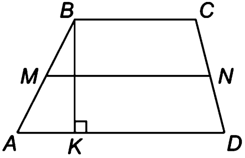


Рис. 8.9

Основания: $BC = a$, $AD = b$.

Боковые стороны: AB, DC.

Средняя линия — отрезок MN, где M — середина AB, N — середина DC;

$MN = \frac{1}{2}(a + b)$.

Высота:

$$BK = h \; (BK \perp AD).$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}\,(a + b)\,h.$$

8.3. Многоугольники

8.3.1. *Выпуклый многоугольник* (*n-угольник*): $A_1A_2 \ldots A_n$ (на рис. 8.10 — выпуклый *шестиугольник* $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6$).

Сумма углов выпуклого n-угольника:

$\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots \angle A_n = 180°(n-2)$.

Диагональ — отрезок, соединяющий любые две вершины, не являющиеся соседними (A_1A_3, A_1A_4 и т. д. на рис. 8.10).

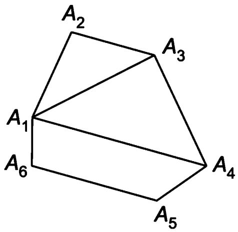


Рис. 8.10

8.3.2. *Правильный* многоугольник — многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны (на рис. 8.11 — правильный шестиугольник).

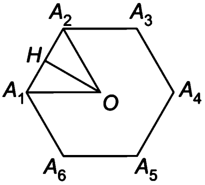


Рис. 8.11

Угол правильного n-угольника:

$$\angle A_i = 180°\frac{n-2}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Радиус описанной окружности (OA_1 на рис. 8.11):

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \text{ где } a \text{ — сторона.}$$

Радиус вписанной окружности (ОН на рис. 8.11):

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}, \text{ где } a \text{ — сторона.}$$

Площадь:

$$S = \frac{a^2 n}{4\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}, \text{ где } a \text{ — сторона.}$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin\frac{360^\circ}{n},$$

где R — радиус описанной окружности.

$$S = r^2 \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

где r — радиус вписанной окружности.

$$S = \frac{1}{2}arn, \text{ где } a \text{ — сторона,}$$

r — радиус вписанной окружности.

$S = \frac{rP}{2}$, где r — радиус вписанной окружности,
P — периметр.

8.3.3. *Характеристики* некоторых правильных многоугольников (φ — угол, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь, a — сторона):

Вид правильного многоугольника	φ	R	r	S	**Сумма углов**
Треугольник	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	180°
Четырехугольник	90°	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2	360°
Шестиугольник	120°	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	720°

8.4. Окружность и круг

8.4.1. *Окружность* — множество точек, равноудаленных от точки, называемой центром (на рис. 8.12 O — центр).

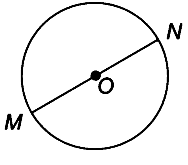


Рис. 8.12

Радиус окружности — отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром: $OM = ON = r$ (см. рис. 8.12).

Диаметр окружности — отрезок, проходящий через центр и соединяющий две точки окружности: $MN = d = 2r$ (см. рис. 8.12).

Длина окружности: $L = 2\pi r$, $L = \pi d$.

8.4.2. *Круг* — окружность, вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею; r — радиус круга, d — диаметр круга.

Площадь круга: $S = \pi r^2$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

8.4.3. *Центральный угол* окружности — угол с вершиной в центре: $\angle AOB$ (рис. 8.13).

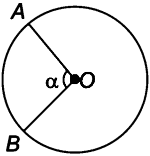


Рис. 8.13

Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

Длина дуги кругового сектора:

$$l = 2\pi r \frac{\alpha}{360}, \text{ где } r \text{ — радиус,}$$

α — градусная мера центрального угла;

$$l = r\alpha,$$

где α — радианная мера центрального угла.

Площадь кругового сектора:

$$s = \pi r^2 \frac{\alpha}{360},$$

где α — градусная мера центрального угла;

$$s = \frac{1}{2} r^2 \alpha,$$

где α — радианная мера центрального угла.

8.4.4. *Круговой сегмент* — часть круга, ограниченная дугой окружности и *хордой* (отрезком, соединяющим две точки окружности): ABC и ABD (рис. 8.14).

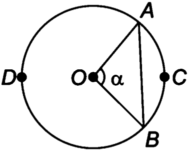


Рис. 8.14

Площадь кругового сегмента:

$$s = \pi r^2 \frac{\alpha}{360} \pm \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha^\circ,$$ где r — радиус,

α — градусная мера центрального угла, содержащего дугу сегмента;

«+», если $\alpha^\circ > 180^\circ$ (ABD);

«–», если $\alpha^\circ < 180^\circ$ (ABC).

8.4.5. *Круговое кольцо* — фигура, ограниченная двумя концентрическими (имеющими общий центр) окружностями (рис. 8.15).

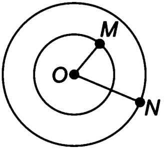


Рис. 8.15

Площадь кругового кольца:

$S = \pi(R^2 - r^2)$, где $R = ON$ — большой радиус, $r = OM$ — малый радиус (см. рис. 8.15).

$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$, где $D = 2R$ — большой диаметр, $d = 2r$ — малый диаметр (см. рис. 8.15).

Пример. Найдите площадь окна, состоящего из полукруга и прямоугольника, размеры которых даны на рис. 8.16.

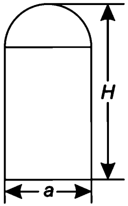


Рис. 8.16

Радиус полукруга: $r=\frac{a}{2}$, площадь полукруга: $S_1=\frac{\pi a^2}{8}$. Высота прямоугольника: $h=H-\frac{a}{2}$, площадь прямоугольника: $S_2=a\left(H-\frac{a}{2}\right)$. Площадь окна:

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi a^2}{8}+a\left(H-\frac{a}{2}\right)=aH-\frac{a^2}{8}(4-\pi).$$

9. Стереометрия

9.1. Многогранники

9.1.1. *Многогранник* — замкнутая поверхность без самопересечений, составленная из многоугольников, вместе с конечной частью пространства, ограниченной ею. Многоугольники — *грани*, стороны граней — *ребра*, концы ребер — *вершины*.

Многогранник — *выпуклый*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Основные выпуклые многогранники: *призма*, *параллелепипед*, *пирамида*, *усеченная пирамида*, *правильные многогранники* (*Платоновы тела*).

9.1.2. *Призма* (рис. 9.1, *а* — наклонная, рис. 9.1, *б* — прямая).

Площадь боковой поверхности призмы:

$S_{бок} = P_{п.с.} l$, где $P_{п.с.}$ — периметр сечения, перпендикулярного ребрам (заштриховано на рис. 9.1, *а*), l — боковое ребро.

Площадь боковой поверхности прямой призмы:

$S_{бок} = P_{осн}h$, где $P_{осн.}$ — периметр основания, h — высота.

Площадь поверхности призмы:

$S = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ — площадь основания.

Объем призмы:

$V = S_{п.с.}l$, где $S_{п.с.}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро;

$V = S_{осн}h$, где $S_{осн.}$ — площадь основания, h — высота.

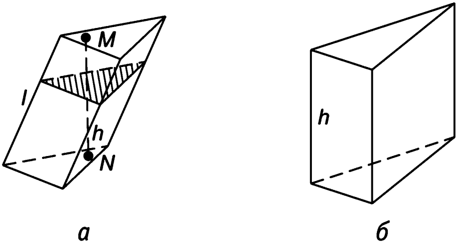


Рис. 9.1

9.1.3. *Параллелепипед* (рис. 9.2, *а* — наклонный, рис. 9.2, *б* — прямой, рис. 9.2, *в* — прямоугольный, рис. 9.2, *г* — куб).

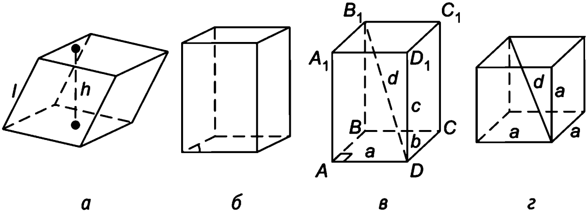


Рис. 9.2

Площадь поверхности:

$S = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ — площадь основания.

Объем:

$V = S_{осн}h$, где $S_{осн.}$ — площадь основания, h — высота.

Соотношения для *прямоугольного* параллелепипеда (см. рис. 9.2, *в*):

- *измерения* (длины ребер): $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$;
- *диагональ*: $DB_1 = d$;

- *соотношение* между измерениями и диагональю: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$;
- *площадь* боковой поверхности: $S_{бок} = 2c(a + b)$;
- *площадь* поверхности: $S = 2(ab + bc + ac)$;
- *объем*: $V = abc$.

Соотношения для *куба* (рис. 9.2, *г*):

- *измерения*: $a = b = c$;
- *соотношение* между измерениями и диагональю: $d^2 = 3a^2$;
- *площадь* боковой поверхности: $S_{бок} = 4a^2$;
- *площадь* поверхности: $S = 6a^2$;
- *объем*: $V = a^3$.

9.1.4. *Пирамида* (рис. 9.3 *а* – общий вид, *б* – правильная пирамида).

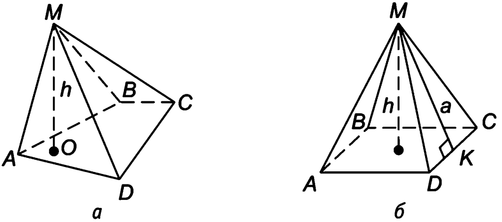


Рис. 9.3

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды (см. рис. 9.3, *б*):

$S_{бок} = \dfrac{1}{2}aP$, где a — *апофема* (высота боковой грани: $a = MK$, $MK \perp DC$ на рис. 9.3, *б*), P — периметр основания.

Площадь поверхности:

$S = S_{бок} + S_{осн}$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ — площадь основания.

Объем пирамиды:

$V = \dfrac{1}{3}S_{осн}h$, где $S_{осн}$ — площадь основания, h — высота.

Треугольная пирамида — *тетраэдр*.

9.1.5. *Усеченная* пирамида (рис. 9.4, *а* – общий вид, *б* – *правильная усеченная пирамида*).

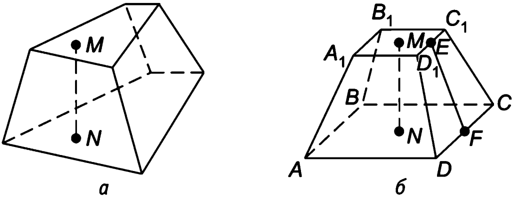


Рис. 9.4

Площадь боковой поверхности *правильной* усеченной пирамиды (см. рис. 9.4, *б*):

$S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} a$, где P_1 и P_2 – периметры оснований, a — *апофема* (высота боковой грани: $a = EF$, $EF \perp DC$ на рис. 9.4, *б*).

Площадь поверхности усеченной пирамиды:

$S = S_{бок} + S_1 + S_2$, где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, S_1 и S_2 — площади оснований.

Объем усеченной пирамиды:

$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где — высота, S_1 и S_2 — площади оснований.

9.1.6. *Правильные* многогранники (платоновы тела).

Выпуклый многогранник — *правильный*, если его грани являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер. К правильным многогранникам относятся *тетраэдр* (рис. 9.5, *а*), *гексаэдр*, или *куб* (рис. 9.5, *б*), *октаэдр* (рис. 9.5, *в*), *додекаэдр* (рис. 9.5, *г*), *икосаэдр* (рис. 9.5, *д*).

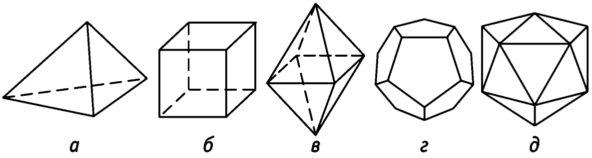


Рис. 9.5

Символ Шлефли:

$(p; q)$, где p — число сторон грани,
q — число граней, сходящихся в одной вершине.

9.1.7. Характеристики правильных многогранников:

№	Название, символ Шлефли	Грани	Число ребер, сходящихся к одной вершине	Число вершин	Число граней	Число ребер	Сумма углов при вершине
1	Тетраэдр, (3; 3)	Треугольники	3	4	4	6	180°
2	Гексаэдр, (4; 3)	Квадраты	3	8	6	12	270°
3	Октаэдр, (3; 4)	Треугольники	4	6	8	12	240°

№	Название, символ Шлефли	Грани	Число ребер, сходящихся к одной вершине	Число вершин	Число граней	Число ребер	Сумма углов при вершине
4	Додекаэдр, (5; 3)	Пятиугольники	3	20	12	30	324°
5	Икосаэдр, (3; 5)	Треугольники	5	12	20	30	300°

Пример. Найдите объем тетраэдра, вписанного в куб с ребром a, так что ребрами тетраэдра являются диагонали граней куба, а вершинами — несмежные вершины куба (рис. 9.6).

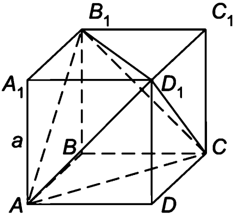


Рис. 9.6

Куб состоит из 5 тел: тетраэдра AB_1CD_1 и четырех равных тетраэдров DD_1AC, $AA_1B_1D_1$, B_1BAC,

$CC_1B_1D_1$. Поэтому объем a^3 куба равен $a^3 = V + 4v$, где V — объем тетраэдра AB_1CD_1, v — объем каждого из равных тетраэдров. Найдем объем тетраэдра DD_1AC, ребра которого взаимно перпендикулярны: $v = \dfrac{a^3}{6}$. Таким образом, объем тетраэдра AB_1CD_1 равен:

$$V = a^3 - 4\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

9.2. Тела вращения

9.2.1. *Тела вращения* — геометрические тела, полученные вращением какой-либо фигуры вокруг оси.

Основные тела вращения:

- прямой круговой *цилиндр* — тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из сторон;
- прямой круговой *конус* — тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;
- *шар* — тело, полученное вращением полукруга вокруг диаметра.

9.2.2. *Цилиндр* вращения (рис. 9.7).

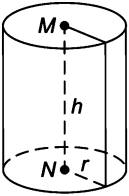


Рис. 9.7

Площадь боковой поверхности:

$S_{бок} = 2\pi rh$, где r — радиус основания, h — высота.

Площадь поверхности:

$S = 2\pi r(r+h)$, где r — радиус основания, h — высота.

Объем цилиндра:

$V = S_{осн}h = \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота.

9.2.3. *Конус* вращения (рис. 9.8).

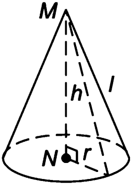


Рис. 9.8

Площадь боковой поверхности:

$S_{бок} = \pi rl$, где r — радиус основания,
l — образующая.

Площадь поверхности:

$S = \pi r(r + l)$, где r — радиус основания,
l — образующая.

Объем конуса:

$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, где r — радиус основания,
h — высота.

9.2.4. *Усеченный конус* вращения (рис. 9.9).

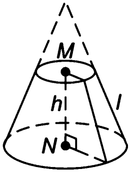


Рис. 9.9

Площадь боковой поверхности:

$S_{бок} = \pi(R+r)l$, где h — высота,
R и r — радиусы оснований.

Площадь поверхности:

$S = \pi R(R+l) + \pi r(r+l)$, где h — высота,
R и r — радиусы оснований.

Объем:

$V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$, где h — высота,
R и r — радиусы оснований.

9.2.5. *Шар* (рис. 9.10, *а*).

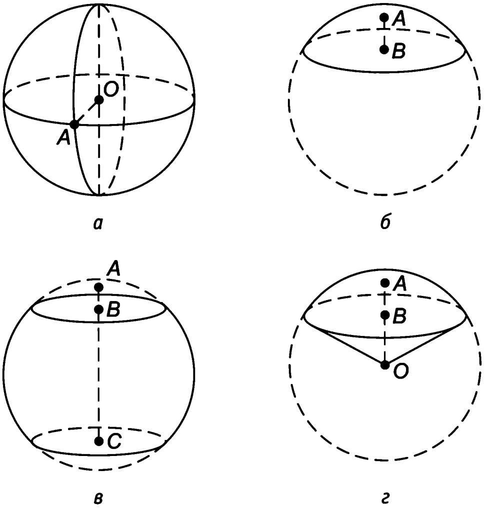


Рис. 9.10

Поверхность, ограничивающая шар, — *сфера*. *Площадь* сферы:

$S = 4\pi r^2$, где r — радиус ($r = OA$ на рис. 9.10, *а*).

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\text{, где } r \text{ — радиус.}$$

9.2.6. *Шаровой сегмент* (см. рис. 9.10, *б*).

Объем шарового сегмента:

$$V = \pi h^2\left(r \pm \frac{1}{3}h\right)\text{, где } r \text{ — радиус шара,}$$

h — высота сегмента, знак + берется, если $h > r$, знак – берется, если $h < r$ (на рис. 9.10, *б*: $h = AB < r$).

9.2.7. *Шаровой слой* (см. рис. 9.10 *в*).

Часть сферы, лежащая между основаниями шарового слоя, — *сферический пояс.*

Площадь сферического пояса:

$$S = 2\pi rh\text{, где } r \text{ — радиус шара,}$$

h — высота шарового слоя ($h = BC$ на рис. 9.10, *в*).

Объем шарового слоя:

$$V = \pi r(h_1^2 - h_2^2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 - h_2^3)\text{, где } r \text{ — радиус}$$

шара, $h_1 = AC$, $h_2 = AB$ (см. рис. 9.10, *в*).

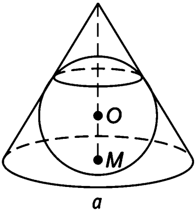
9.2.8. *Шаровой сектор* (см. рис. 9.10, *г*).

Объем шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \text{, где } r \text{ — радиус шара,}$$

h — высота соответствующего шарового сегмента ($h = AB$ на рис. 9.10, *г*).

Пример. В конус, осевое сечение которого — правильный треугольник, вписана сфера так, что она касается основания и боковой поверхности конуса. Найдите отношения площади сферы к площади поверхности конуса (рис. 9.11, *а*).



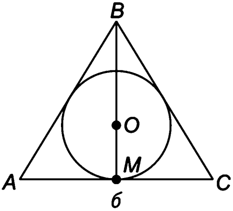


Рис. 9.11

На рис. 9.11, *б* представлены осевые сечения конуса и шара — сечения, проходящие через ось конуса.

Пусть $AB = BC = AC = a$, $BM \perp AC$, $OM = r$ — радиус шара. Тогда $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Площадь сферы: $S_{сф} = 4\pi r^2 = \frac{4\pi \cdot 3a^2}{36} = \frac{\pi a^2}{3}$.

Образующая конуса: $l = AB = a$.

Радиус его основания: $R = \frac{a}{2}$.

Площадь поверхности конуса:

$$S_к = \pi R(R + l) = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3\pi a^2}{4}.$$

Таким образом, отношение площадей составляет

$$\frac{S_{сф}}{S_к} = \frac{\pi a^2 \cdot 4}{3 \cdot 3\pi a^2} = \frac{4}{9}.$$

10. Линейная алгебра

10.1. Матрицы

10.1.1. *Матрица* — упорядоченное множество mn чисел, расположенных в виде таблицы, имеющей m строк и n столбцов:

$$A = A[m \times n] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц:

$$A[m \times n] = B[m \times n] \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ где}$$
$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

$(a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n})$ — матрица-*строка*; $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ — матрица-*столбец*.

Если $m = n$, то матрица — *квадратная* n-го порядка.

Нулевая матрица:

$$O[m\times n]=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}=0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n).$$

Диагональная матрица n-го порядка:

$$A[n\times n]=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,\dots,n).$$

Единичная матрица n-го порядка:

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\ \left(a_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases},\ i,j=1,\dots,n\right).$$

Транспонирование матрицы — перемена местами строк и столбцов:

$$A[m\times n]=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$B[n \times m] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = A^T.$$

Здесь A^T — *транспонированная* по отношению к A матрица.

Свойство: $\left(A^T\right)^T = A$.

10.1.2. *Линейные* операции.

Сложение:

$$C[m \times n] = A[m \times n] + B[m \times n] \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$
$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Свойства:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + O = A$.

Умножение на число:

$$B[m \times n] = kA[m \times n] = A[m \times n]k \Leftrightarrow b_{ij} = ka_{ij},$$
$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Свойства ($k, l \in R$):

1) $k(lA) = (kl)A$;

2) $(k + l)A = kA + lA$;

3) $k(A + B) = kA + kB$.

Пример. Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.

Вычислите $2A - B^T$.

$$2A - B^T = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 10 & 4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 10 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -11 \\ -4 & -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

10.1.3. *Умножение* матрицы на матрицу (рис. 10.1):

$$AB = A[m \times n] \cdot B[n \times p] = C[m \times p],$$

$$\text{где } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

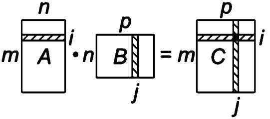


Рис. 10.1

Свойства:

1) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, $k \in R$;
2) $(AB)C = A(BC)$, A, B, C — матрицы;
3) $A(B + C) = AB + AC$;
4) если $A = A(m \times n)$, то $AE_n = E_mA = A$, где E_n, E_m — единичные матрицы.

Пример:

Дано: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 2 & 4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$.
Вычислите AB.

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 10\\ 2 & 4\\ 6 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}21+0-6 & 30+0+5\\ 7-4+24 & 10-8-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 35\\ 27 & -18\end{pmatrix}.$$

10.1.4. *Квадратная* матрица B n-го порядка — *обратная* по отношению к квадратной матрице A n-го порядка, если $AB = BA = E_n$. Обозначение: A^{-1}.

Квадратная матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда *определитель* Δ матрицы A не равен 0.

Формула *обратной* матрицы:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} $(i,\, j=1,2,\dots,n)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы A,

$\Delta=|A|=\det A$ — определитель матрицы A.

10.1.5. *Ненулевая* матрица-столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *собственный вектор* квадратной матрицы $A[n\times n]$, число λ — *собственное число* матрицы A, если $AX=\lambda X$.

Характеристическое уравнение матрицы $A[n\times n]$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow |A-\lambda E|=0.$$

Его корни — собственные числа.

10.2. Определители

10.2.1. *Определитель* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка (определитель второго порядка) — число $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

10.2.2. *Минор* M_{ij} матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка — определитель второго порядка, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца матрицы A.

Пример:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A — минор M_{ij}, взятый со знаком +, если сумма индексов $i + j$ четная, и взятый со знаком −, если нечетная:

Пример:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21},\ A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}.$$

Определитель матрицы A третьего порядка (определитель третьего порядка) — число Δ, равное сумме произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

10.2.3. Определитель третьего порядка:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Этот определитель можно вычислить по *схеме треугольников* (рис. 10.2, *а*) или по *правилу Саррюса* (рис. 10.2, *б*).

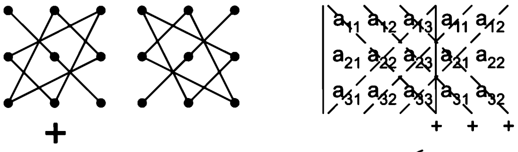


Рис. 10.2

10.2.4. *Определитель* матрицы A n-го порядка (определитель n-го порядка) — число Δ, равное сумме произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Миноры и алгебраические дополнения определяются аналогично предыдущему.

10.2.5. *Теорема разложения* для вычисления определителей n-го порядка: определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов *любой* строки или *любого* столбца на их алгебраические дополнения.

10.3. Системы линейных уравнений

10.3.1. *Система m* линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь x_j — неизвестные ($j = 1, 2, \ldots, n$), a_{ij} — коэффициенты ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), b_i — свободные члены ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Решение системы — упорядоченный набор n чисел ($\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$), при подстановке которых в систему каждое ее уравнение превращается в верное числовое равенство.

Система *совместна*, если имеет хотя бы одно решение; система *несовместна*, если не имеет ни одного решения. Совместная система *определенная*, если имеет единственное решение; и *неопределенная*, если имеет бесконечное множество решений.

Метод Гаусса решения системы m линейных уравнений с n неизвестными — метод приведения системы к *трапециевидной* форме с последующим нахождением неизвестных, если система совместна.

10.3.2. *Система n* линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10.3.3 *Теорема Крамера.* Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система имеет единственное решение.

Формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \text{ при } \Delta \neq 0.$$

Здесь Δ_i — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

10.3.4. *Матричная форма* системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$AX = B,$$

где A — матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Решение системы в матричной форме: если $\Delta \neq 0$, то $X = A^{-1}B$, где A^{-1} — обратная матрица.

Пример. Решите систему $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ по формулам Крамера и матричным способом.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \text{решение единственно.}$$

1. Формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 15 = -16;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,6.$$

2. Матричный способ:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 - 0,3 \\ -1,5 - 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,2 \\ x_2 = -1,6 \end{cases}.$$

11. Операции с векторами

11.1. Определение и характеристики вектора

11.1.1. *Вектор* — отрезок, которому приписано определенное направление (рис. 11.1): $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, A — начало, B — конец.

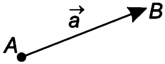


Рис. 11.1

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — длина отрезка AB; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}| = a \geq 0$.

Нулевой вектор — вектор $\vec{0}$, начало и конец которого совпадают; $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Единичный вектор — вектор $\vec{e}$, модуль которого равен 1; $|\vec{e}| = 1$.

11.1.2. *Угол* между двумя ненулевыми векторами (рис. 11.2, *а*):

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \varphi,\ 0° \le \varphi \le 180°.$$

Рис. 11.2

Два ненулевых вектора *ортогональны*, если $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 90°$ (рис. 11.2, *б*). Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$. Ненулевые векторы *коллинеарны*, если параллельны одной прямой (рис. 11.3). Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$.

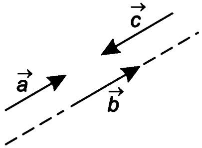


Рис. 11.3

На рис. 11.3 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *сонаправлены*: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ *противоположно* направлены: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0^\circ \text{ ; } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 180^\circ .$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *равны*, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

11.1.3. Три ненулевых вектора компланарны, если они параллельны одной плоскости (рис. 11.4).

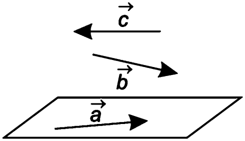


Рис. 11.4

11.2. Линейные операции с векторами

11.2.1. *Сложение* двух ненулевых векторов: сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по правилу *треугольника* (рис. 11.5, *а*) или по правилу *параллелограмма* (рис. 11.5, *б*): $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

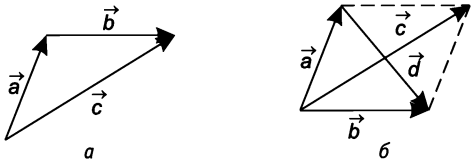


Рис. 11.5

Свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) вектор $(-\vec{a})$ противоположен вектору $\vec{a}$, если $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$; $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$, $(-\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}$.

11.2.2. *Разность* векторов:

$$\vec{d}=\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{b}-\vec{a}.$$

11.2.3. *Сложение n* векторов:

$$\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n.$$

Сумма n векторов находится по правилу многоугольника (рис. 11.6).

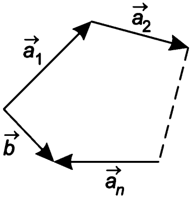


Рис. 11.6

11.2.4. *Умножение* вектора на число:

$$\vec{b} = k\vec{a} \quad (k \in R);$$

$$\vec{b} = k\vec{a} \overset{k>0}{\Leftrightarrow} \left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|, \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a};$$

$$\vec{b} = k\vec{a} \overset{k<0}{\Leftrightarrow} \left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}; \ \vec{b} = k\vec{a} \overset{k=0}{\Leftrightarrow} \vec{b} = \vec{0}.$$

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k иллюстрирует рис. 11.7.

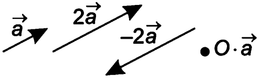


Рис. 11.7

Свойства:

1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;

2) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$, $k, l \in R$;

3) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

11.3. Скалярное произведение векторов

11.3.1. *Скалярное произведение* векторов — *число*:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Скалярный квадрат: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$.

Свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $k(\vec{a},\vec{b})=(k\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},k\vec{b})$, $k\in R$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

5) если $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

11.3.2. *Проекция* вектора на вектор:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},\quad \vec{b}\neq\vec{0};$$

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|},\ \vec{a}\neq\vec{0},\text{ где }\varphi=(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ol:

$$np_{Ol}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge Ol).$$

11.3.3. *Косинус* угла между векторами:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Если $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \varphi < 90°$;
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90° < \varphi \leq 180°$.

11.4. Векторное произведение векторов

11.4.1. *Векторное* произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ — *вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, такой что

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$,

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$,

3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая (рис. 11.8).

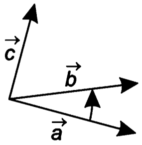


Рис. 11.8

Свойства:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$;

2) $k(\vec{a}\times\vec{b}) = k\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times k\vec{b}$, $k \in R$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) если $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$.

11.4.2. *Геометрический* смысл $\vec{a}\times\vec{b}$ (рис. 11.9):

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABD}.$$

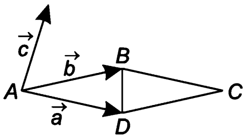


Рис. 11.9

11.4.3. *Двойное* векторное произведение *трех* векторов — вектор $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, причем:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

11.5. Смешанное произведение трех векторов

11.5.1. *Смешанное* произведение трех векторов — число:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\,.$$

Свойства:

1) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$;

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$;

3) Если $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{c}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

11.5.2. Геометрический смысл $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = V\,.$$

Здесь V— объем параллелепипеда, построенного на векторах (рис. 11.10).

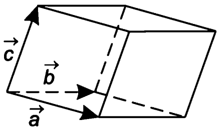


Рис. 11.10

11.6. Координатная форма вектора

11.6.1. *Ортонормированный* базис на *плоскости* $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j} \text{ (рис. 11.11, } a\text{)}.$$

Ортонормированный базис в *пространстве*, правая тройка $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}$$

(рис. 11.11, *б*).

Рис. 11.11

11.6.2. *Координатная* форма вектора на *плоскости* (рис. 11.12, *а*):

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \{x; y\}.$$

Здесь x и y — координаты (проекции вектора на оси Ox и Oy).

Координатная форма вектора в *пространстве* (рис. 11.12, *б*):

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x; y; z\}.$$

Здесь x, y и z – координаты (проекции вектора на оси Ox, Oy и Oz).

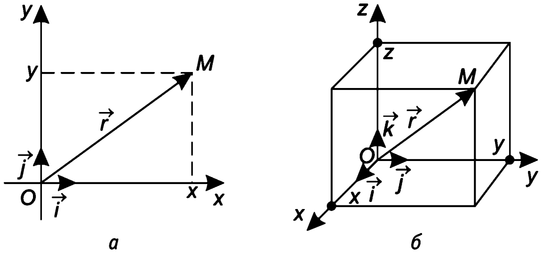


Рис. 11.12

Модуль вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Координаты и модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$,

где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1, z = z_2 - z_1;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Здесь α, β, γ — углы, образованные вектором $\vec{r}$ и осями координат.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

11.6.3. *Сумма* векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ \text{ и } \ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}:$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

11.6.4. *Произведение* вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ на число m:

$$m\vec{a} = mx_1\vec{i} + my_1\vec{j} + mz_1\vec{k}.$$

11.6.5. *Скалярное* произведение векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ \text{ и } \ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}:$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

11.6.6. *Косинус* угла между векторами

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}:$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\text{при } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

11.6.7. *Векторное* произведение векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}:$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

11.6.8. *Смешанное* произведение векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\text{и } \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}:$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

11.6.9. Условие *ортогональности* ненулевых векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Условие *коллинеарности* ненулевых векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Условие *компланарности* трех ненулевых векторов:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример: Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(6;\ 1;\ 1)$, $C(4;\ -1;\ 2)$.

Координатная форма вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (6-2)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Его модуль: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Координатная форма вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (4-2)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} =$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$$

Его модуль: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

Скалярное произведение векторов:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 9$.

Косинус угла и угол:

$$\cos\varphi = \frac{9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \varphi = 45^\circ .$$

12. Аналитическая геометрия на плоскости

12.1. Декартова система координат на плоскости

12.1.1. *Прямоугольная декартова* система координат на плоскости — две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy с единым началом — точкой O и выбранным масштабом (рис. 12.1). Обозначение: Oxy.

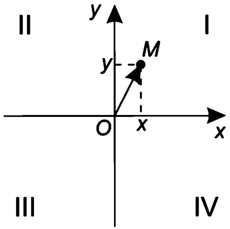


Рис. 12.1

Плоскость, на которой задана система координат, — *координатная* плоскость.

12.1.2. *Декартовы координаты* точки M на плоскости — проекции *радиус-вектора* $\overrightarrow{OM}$ точки M на оси Ox и Oy: $x = пр_{Ox}\overrightarrow{OM}$, $y = пр_{Oy}\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 12.1). Обозначение: $M(x, y)$; x — *абсцисса*, y — *ордината*.

Знаки координат точки $M(x, y)$ по четвертям (квадрантам):

Кордината	**I**	**II**	**III**	**IV**
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Расстояние d между двумя точками $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Координаты x_0 и y_0 точки, делящей отрезок MN пополам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}\ .$$

Координаты точки $K(x_0, y_0)$, делящей отрезок MN в отношении $\dfrac{MK}{KN} = \dfrac{m}{n}$:

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m},\ y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}.$$

12.1.3. *Параллельный перенос* координатных осей:

$$\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b \end{cases}.$$

Здесь $(x; y)$ — координаты точки M в старой системе координат Oxy, $(x_1; y_1)$ — координаты точки M в новой системе координат $O_1x_1y_1$, $(a; b)$ — координаты точки O_1 в системе Oxy.

12.1.4. *Поворот* координатных осей на угол φ:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \end{cases}.$$

Здесь $(x; y)$ — координаты точки M в старой системе координат Oxy, $(x_1; y_1)$ — координаты точки M в новой системе координат Ox_1y_1.

12.1.5. Уравнение *линии* на плоскости: $F(x; y) = 0$.

Параметрические уравнения *линии* на плоскости:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

12.2. Уравнения прямой на плоскости

12.2.1. *Различные виды* уравнений прямой на плоскости (рис. 12.2):

№	Название	Вид	Пояснение
1	Векторно-параметрическое	$\vec{r} = \vec{s}t + \vec{r}_0$	$\vec{r} = \{x; y\}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x; y)$
2	Параметрические	$\begin{cases} x = kt + x_0 \\ y = lt + y_0 \end{cases}$	$\vec{r}_0 = \{x_0; y_0\}$ — радиус-вектор заданной точки $M_0(x_0; y_0)$
3	Каноническое	$\dfrac{x - x_0}{k} = \dfrac{y - y_0}{l}$	$\vec{s} = \{k; l\}$ — направляющий вектор
4	Общее	$Ax + By + C = 0$	A, B — координаты нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$
5	Нормальное	$x\cos\alpha + y\sin\alpha -$ $- p = 0$	0 $\cos\alpha = \dfrac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $p = \dfrac{\mp C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак противоположен знаку C

Продолжение ▸

(Продолжение)

№	Название	Вид	Пояснение
6	В отрезках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a, b — абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy: $P(a; 0)$, $Q(0; b)$
7	С угловым коэффициентом	$y = kx + b$	k — тангенс угла наклона прямой к оси Ox

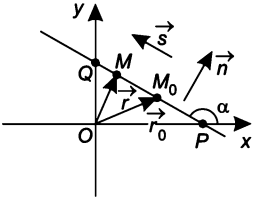


Рис. 12.2

12.2.2. *Расстояние* d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

12.2.3. *Уравнение* прямой, проходящей через 2 точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

12.2.3. *Условие* того, что 3 точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

12.2.4. *Точка пересечения* двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$x_0 = \frac{-C_1B_2 + C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \ y_0 = \frac{-A_1C_2 + A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$\text{при } A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0.$$

12.2.5. *Косинус угла* между прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \text{ при } A_1^2 + B_1^2 \neq 0,$$

$$A_2^2 + B_2^2 \neq 0.$$

12.2.6. Условие *перпендикулярности* прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

12.2.7. Условие *параллельности* прямых: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

12.3. Кривые второго порядка на плоскости

12.3.1. *Эллипс* (рис. 12.3, *а*). Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, при } 0<b<a.$$

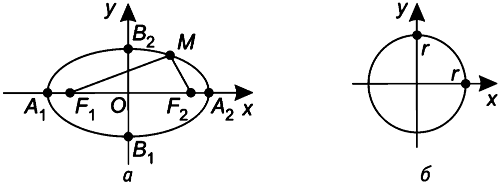


Рис. 12.3

Вершины: $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$.
Большая ось: $A_1A_2 = 2a$; *малая* ось: $B_1B_2 = 2b$.

Фокусы: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
Характеристическое свойство: $MF_1 + MF_2 = 2a$, где M — произвольная точка эллипса.
Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\ 0\le\varepsilon<1.$$

С увеличением эксцентриситета ($\varepsilon \to 1$) эллипс «вытягивается» вдоль оси Ox.

Если $\varepsilon = 0$, то $a=b=r$, $\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=r^2$ – уравнение *окружности* с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом r (рис. 12.3, *б*).

Площадь эллипса:

$$S=\pi ab.$$

Параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}.$$

Параметрические уравнения окружности:

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}.$$

Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ при $0<a<b$ «вытянут» вдоль оси Oy.

Уравнение *окружности* с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом r:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

12.3.2. *Гипербола* (рис. 12.4). Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ при } a > 0, b > 0.$$

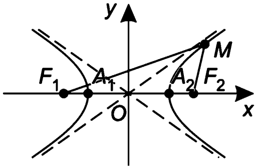


Рис. 12.4

Вершины: $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$.

Действительная ось: $A_1A_2 = 2a$; *мнимая* ось: $B_1B_2 = 2b$, где $B_1(-b;\ 0)$, $B_2(b;\ 0)$.

Асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$. *Фокусы*: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Характеристическое свойство: $|MF_2 - MF_1| = 2a$, где M — произвольная точка гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},\ \varepsilon > 1.$$

При $\varepsilon \to 1$ ветви гиперболы приближаются к Ox; при $\varepsilon \to \infty$ ветви гиперболы приближаются к Oy.

Гипербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ при $a > 0, b > 0$ пересекает ось Oy.

12.3.3. *Парабола* (рис. 12.5, *а*, *б*). Каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px, p \neq 0.$$

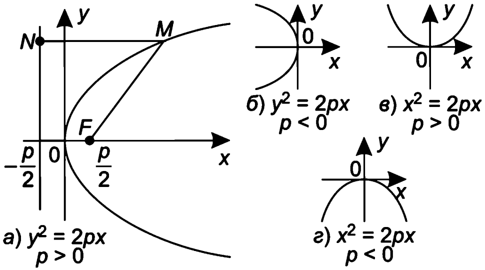


Рис. 12.5

Вершина: $O(0;\ 0)$. *Фокус*: $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, *директриса*: $x = -\frac{p}{2}$.

Характеристическое свойство: $MF = MN$, где M — произвольная точка параболы, MN — расстояние до директрисы.

Параболы $y^2 = 2px$ *при* $p < 0$ и $x^2 = 2py$ при $p > 0$ и $p < 0$ представлены на рис. 12.5, *б*, *в*, *г*.

12.3.4. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ при $a \neq 0, b \neq 0$ задает точку $O(0;\ 0)$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ при $a \neq 0, b \neq 0$ задает две прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Уравнение $x^2 = c^2$ при $c \neq 0$ задает две прямые $x=\pm c$, параллельные оси Oy.

Уравнение $y^2 = c^2$ при $c \neq 0$ задает две прямые $y=\pm c$, параллельные оси Ox.

Уравнение $x^2 = 0$ задает ось Oy. Уравнение $y^2 = 0$ задает ось Ox.

12.4. Полярная система координат на плоскости

12.4.1. *Полярная* система координат на плоскости — $(r;\varphi)$, где r — длина радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M, φ — угол наклона вектора $\vec{r}$ к оси Ox (рис. 12.6); $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

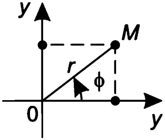


Рис. 12.6

12.4.2. *Связь* декартовых координат с полярными:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x^2 + y^2 = r^2,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

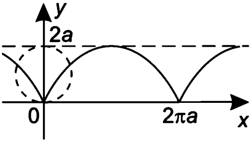
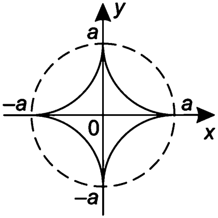
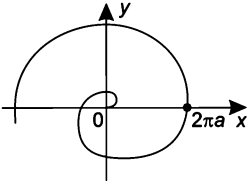
12.4.3. Уравнение *окружности* $x^2 + y^2 = r_0^{\ 2}$ в полярных координатах:

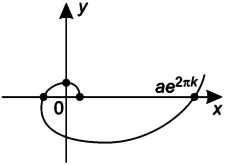
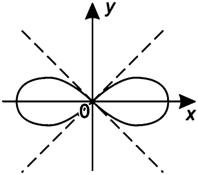
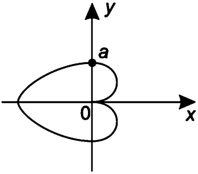
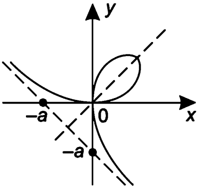
$$r = r_0.$$

12.4.4. Уравнение *прямой* $y = kx$ в полярных координатах:

$$\varphi = \operatorname{arctg} k.$$

12.5. Кривые, заданные параметрическими уравнениями и уравнениями в полярных координатах

№	Название	Формула	График
1	Циклоида	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	
2	Гипоциклоида (астроида)	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right)$	
3	Спираль Архимеда	$r = a\varphi$	

№	Название	Формула	График
4	Логарифмическая спираль	$r = ae^{k\varphi}$ $(k > 0)$	
5	Лемниската Бернулли	$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$	
6	Кардиоида	$r = a(1 - \cos\varphi)$	
7	Декартов лист	$r = \dfrac{3a \sin 2\varphi}{2(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)}$	

Пример: Определите вид кривых второго порядка $x^2 + 4y^2 = 25$ и $x^2 - y^2 = 5$ и найдите координаты их точек пересечения.

$$x^2 + 4y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2{,}5^2} = 1 \text{ — эллипс;}$$

$$a = 5,\ b = 2{,}5.$$

$$x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \text{ — гипербола;}$$

$$a = b = \sqrt{5}.$$

Координаты точек пересечения:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 = 45 \\ 5y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Точки пересечения: $K(3;\ 2)$, $L(3;\ -2)$, $M(-3;\ -2)$, $N(-3;\ 2)$.

13. Аналитическая геометрия в пространстве

13.1. Декартова система координат в пространстве

13.1.1. *Прямоугольная декартова* система координат в пространстве — три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz с единым началом — точкой O и выбранным масштабом (рис. 13.1). Обозначение: $Oxyz$.

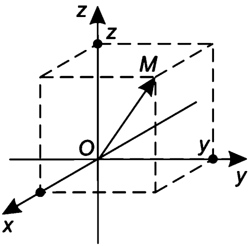


Рис. 13.1

13.1.2. *Декартовы координаты* точки M в пространстве — проекции *радиус-вектора* $\overrightarrow{OM}$ точки M на оси Ox, Oy и Oz: $x = пр_{Ox}\overrightarrow{OM}$, $y = пр_{Oy}\overrightarrow{OM}$ и $z = пр_{Oz}\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 13.1). Обозначение: $M(x, y, z)$; x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата*. *Знаки* координат точки $M(x, y, z)$ в октантах:

Кордината	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

Расстояние d между двумя точками $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты x_0, y_0 и z_0 точки, делящей отрезок MN пополам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координаты точки $K(x_0, y_0, z_0)$, делящей отрезок MN в отношении $\frac{MK}{KN} = \frac{m}{n}$:

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m},\ y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m},\ z_0 = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m}.$$

13.1.3. *Параллельный перенос* координатных осей:

$$\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \\ z = z_1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b \\ z_1 = z - c \end{cases}.$$

Здесь $(x;\ y;\ z)$ — координаты точки M в старой системе координат $Oxyz$, $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — координаты точки M в новой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, $(a;\ b;\ c)$ — координаты точки O_1 в системе $Oxyz$.

13.1.4. Уравнение *поверхности* в пространстве:

$$F(x, y, z) = 0.$$

13.1.5. Уравнения *линии* в пространстве:

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0 \\ F_2(x; y; z) = 0 \end{cases}.$$

13.2. Уравнения плоскости в пространстве

13.2.1. *Различные виды* уравнений плоскости в пространстве (рис. 13.2):

№	Название	Формула	Пояснение
1	Векторное	$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$	$\vec{r}=\{x;y;z\}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x;\ y;\ z)$;
2	В координатной форме	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$	$\vec{r}_0=\{x_0;y_0;z_0\}$ — радиус-вектор заданной точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$; $\vec{n}=\{A;B;C\}$ — нормальный вектор
3	Общее	$Ax+By+Cz+D=0$	$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$
4	В отрезках на осях	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	a, b, c — абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy, Oz: $M(a;\ 0;\ 0)$, $N(0;\ b;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ c)$

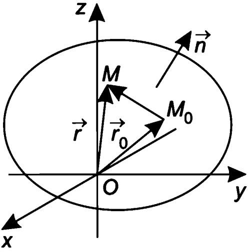


Рис. 13.2

13.2.2. *Расстояние* d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

13.2.3. *Косинус* угла между плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\text{и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0:$$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

при $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$.

13.2.4. Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

13.2.5. Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

13.3. Уравнения прямой в пространстве

13.3.1. Различные виды уравнений прямой в пространстве (рис. 13.3):

<table>
<tr><th>№</th><th>Название</th><th>Вид</th><th>Пояснение</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Векторно-параметрическое</td><td>$\vec{r} = \vec{s}t + \vec{r}_0$</td><td rowspan="3">$\vec{r} = \{x; y; z\}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x;\ y;\ z)$,
$\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ — радиус-вектор заданной точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$,
$\vec{s} = \{k; l; m\}$ — направляющий вектор</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Параметрические</td><td>$\begin{cases} x = kt + x_0 \\ y = lt + y_0 \\ z = mt + z_0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Канонические</td><td>$\dfrac{x - x_0}{k} = \dfrac{y - y_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{m}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Общие</td><td>$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$</td><td>$\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$,
$\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ — нормальные векторы пересекающихся плоскостей</td></tr>
</table>

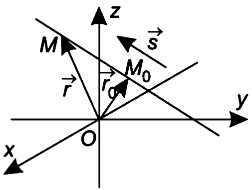


Рис. 13.3

13.3.2. *Косинус* угла между прямыми

$$\frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1}$$

$$\text{и}\ \frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}:$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2\right|}{\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}\sqrt{k_2^2+l_2^2+m_2^2}}$$

при $k_1^2+l_1^2+m_1^2\neq 0$, $k_2^2+l_2^2+m_2^2\neq 0$.

13.3.3. Условие *перпендикулярности* двух прямых:

$$k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2=0.$$

13.3.4. Условие *параллельности* двух прямых:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}.$$

13.4. Прямая и плоскость в пространстве

13.4.1. *Синус* угла между прямой $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=$ $=\frac{z-z_0}{m}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi=\frac{|kA+lB+mC|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

при $k^2+l^2+m^2\neq 0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

13.4.2. Условие *перпендикулярности* прямой и плоскости:

$$\frac{k}{A}=\frac{l}{B}=\frac{m}{C}.$$

13.4.3. Условие *параллельности* прямой и плоскости:

$$kA+lB+mC=0.$$

Пример. Найдите точку пересечения между прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ и плоскостью $x-2y+3z-$ $-5=0$.

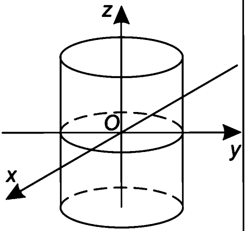
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=2t+2\\ y=-t-1\\ z=t-2\end{cases}\Rightarrow$$

$$(2t+2)-2(-t-1)+3(t-2)-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7t-7=0\Rightarrow t=1\Rightarrow$$

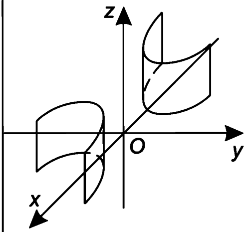
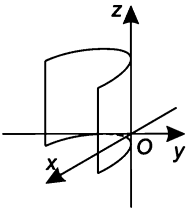
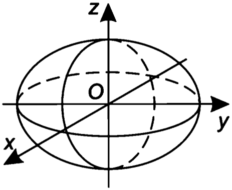
$$\begin{cases}x=2+2=4\\ y=-1-1=-2\\ z=1-2=-1\end{cases}\Rightarrow M(4;-2;-1).$$

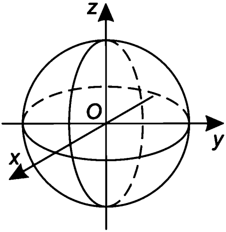
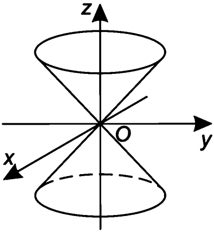
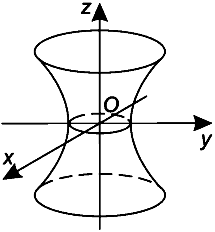
13.5. Поверхности второго порядка

№	**Название**	**Формула**	**Рисунок**
1	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	

Продолжение ▸

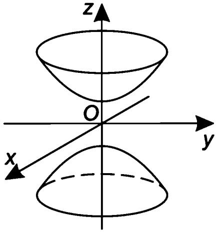
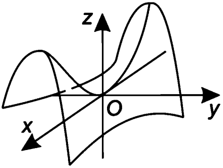
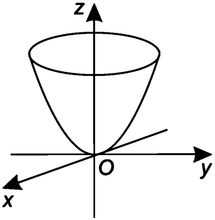
(Продолжение)

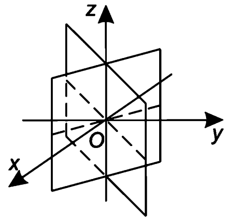
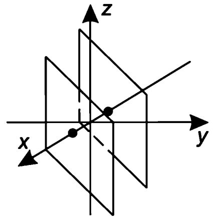
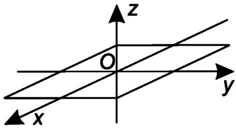
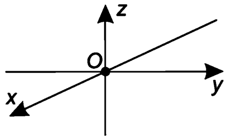
№	Название	Формула	Рисунок
2	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
3	Параболический цилиндр	$y^2=2px$	
4	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	

№	Название	Формула	Рисунок
5	Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	
6	Конус	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	
7	Однополостный гиперболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	

Продолжение ▸

(Продолжение)

№	Название	Формула	Рисунок
8	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
9	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=z$, $p>0,\ q>0$	
10	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z$, $p>0,\ q>0$	

№	Название	Формула	Рисунок
11	Две пересекающиеся плоскости	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
12	Две параллельные плоскости	$\frac{x^2}{a^2}=1$	
13	Плоскость	$z^2 = 0$	
14	Точка $O(0;\,0;\,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	

13.6. Цилиндрическая и сферическая системы координат

13.6.1. *Цилиндрическая* система координат: $(r;\varphi;z)$, где r — длина вектора $\overrightarrow{OM_1}$ (составляющей радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по плоскости Oxy); φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{OM_1}$ к оси Ox; z — аппликата точки M (рис. 13.4).

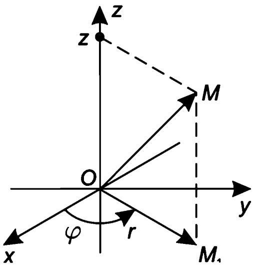


Рис. 13.4

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

13.6.2. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z;$$

$$x^2 + y^2 = r^2,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

13.6.3. *Уравнения* некоторых поверхностей в цилиндрических координатах:

- *круговой цилиндр*:

$$x^2 + y^2 = r_0^2 \Leftrightarrow r = r_0;$$

- *сфера*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2 \Leftrightarrow r^2 + z^2 = r_0^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{r_0^2 - r^2};$$

- *конус*:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z = \pm r;$$

- *однополостный гиперболоид*:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{r^2 - 1};$$

- *двуполостный гиперболоид*:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \Leftrightarrow r^2 - z^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{r^2 + 1};$$

- *эллиптический параболоид*:

$$x^2 + y^2 = z \Leftrightarrow z = r^2.$$

13.6.4. *Сферическая* система координат: $(r;\varphi;\theta)$, где r — длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M, φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{OM_1}$ (составляющей радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по плоскости Oxy) к оси Ox, θ — угол отклонения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ от оси Oz (рис. 13.5).

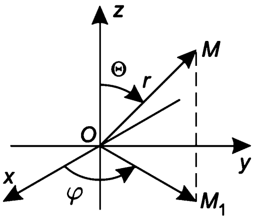


Рис. 13.5

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

13.6.5. *Связь* между декартовыми и сферическими координатами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta;$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\ \operatorname{tg}^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}.$$

13.6.6. Уравнения некоторых поверхностей в сферических координатах:

- *сфера*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2 \Leftrightarrow r = r_0 ;$$

- *конус*:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} .$$

14. Пределы

14.1. Предел последовательности

14.1.1. Число a — *предел* числовой последовательности a_n, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого, то есть при $n \geq N$, выполняется условие $|a_n - a| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

14.1.2. Пределом числовой последовательности a_n является $+\infty$ ($-\infty$), если для любого числа $M > 0$ найдется номер $N = N(M)$, начиная с которого, то есть при $n \geq N$, выполняется условие $a_n > M$ ($a_n < -M$). Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Примеры.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ при $q > 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ при $k > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ при $k > 0$.

14.1.3. *Замечательный* предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\text{, где } e = 2{,}71828\ldots .$$

14.2. Предел функции

14.2.1. Число A — *предел* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $|x - x_0| < \delta$, $x \in D_f$, $x \neq x_0$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A .$$

Число A — *предел* функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что из условий $x > M$ ($x < -M$), $x \in D_f(x)$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right).$$

14.2.2. Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 является $+\infty$ ($-\infty$), если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что из условий

$|x - x_0| < \delta$, $x \in D_f$, $x \neq x_0$ следует $f(x) > M$ ($f(x) <$ $< -M$). Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right).$$

14.2.3. *Односторонние* пределы:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \text{ — \textit{правосторонний};}$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \text{ — \textit{левосторонний}.}$$

14.2.4. Функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что равносильно условиям $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Если не выполняется хотя бы одно из последних условий, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *разрыв*.

14.2.5. *Арифметические* операции с конечными пределами: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, где A и B — числа, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) g(x)\right) = AB;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при } B \neq 0.$$

14.2.6. *Замечательные* пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2{,}71828\ldots.$$

14.2.7. Функция $\alpha(x)$ — *бесконечно малая* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функция $f(x)$ — *бесконечно большая* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0.$$

14.2.8. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентны* в точке x_0. Обозначение: $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta_1(x)=0$, причем $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha_1(x)$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Эквивалентные бесконечно малые:

1) $\sin\alpha(x)\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}\alpha(x)\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\alpha(x)$;

3) $1-\cos\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha^2(x)/2$;

4) $\arcsin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$;

5) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$;

6) $e^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$;

7) $a^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)\ln a$;

8) $\ln\left(1+\alpha(x)\right) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$;

9) $\log_a\left(1+\alpha(x)\right) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)/\ln a$;

10) $\left(1+\alpha(x)\right)^{\mu}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \mu\alpha(x)$.

14.2.9. Предел *показательно-степенной* функции:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{0,5-0,7x-8,1x^2}{0,9x^2-1,3x+0,6} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{0,5}{x^2}-\frac{0,7}{x}-8,1\right)}{x^2\left(0,9-\frac{1,3}{x}+\frac{0,6}{x^2}\right)} = \frac{-8,1}{0,9} = -9;$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 4x}{\ln\left(1-2\sin 5x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{-10x^2} = -1,6.$$

15. Производные

15.1. Определение и геометрический смысл производной

15.1.1. *Производная* — предел отношения приращения функции $f(x)$ к вызвавшему его приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta x \neq 0$ — приращение аргумента, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — приращение функции. Обозначение:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

15.1.2. Значение производной функции $f(x)$ в точке с абсциссой x равно *тангенсу* угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $(x; f(x))$ (рис. 15.1).

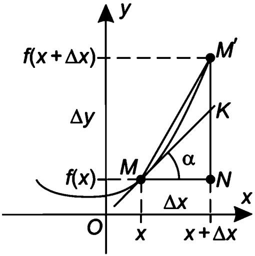


Рис. 15.1

На рисунке MM' — секущая, MK — касательная;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{M'N}{MN}=\operatorname{tg}\angle M'MN \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{M'\to M}\operatorname{tg}\angle M'MN=\operatorname{tg}\angle KMN=\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Пример: На рис. 15.2. представлен график функции $y = f(x)$. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

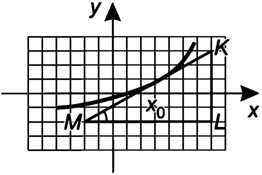


Рис. 15.2

Значение производной $y = f(x)$ в точке x_0 — тангенс угла KML:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\angle KML = \frac{KL}{ML} = \frac{5}{9}.$$

15.1.3. Уравнение *касательной* к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

15.1.4. Уравнение *нормали* к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

15.2. Правила дифференцирования и таблица производных

15.2.1. *Дифференцирование* — нахождение производной.

Основные правила дифференцирования:

1) $\left(Cf(x)\right)' = C\left(f(x)\right)'$;

2) $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$;

3) $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

4) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$;

5) $\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$;

6) $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g'(x)f(x)^{g(x)} \ln f(x) +$

$+g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

15.2.2. Таблица *производных*:

1) $C' = 0\ (C = \text{const})$;

2) $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

5) $(a^x)' = a^x \ln a$;

6) $(e^x)' = e^x$;

7) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

8) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$;

11) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

12) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

16) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

17) $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$;

18) $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$.

Примеры:

1) $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' =$
$= 3x^2 \ln x + x^2$;

2) $\left(\log_3(3^x+3)\right)' = \dfrac{(3^x+3)'}{(3^x+3)\ln 3} =$

$= \dfrac{3^x \ln 3}{(3^x+3)\ln 3} = \dfrac{3^x}{3^x+3}.$

15.3. Дифференциал и его геометрический смысл

15.3.1. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A конечно, $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то $f(x)$ *дифференцируема* в точке x.

15.3.2. *Дифференциал* функции $y = f(x)$ в точке x — линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке: $dy = A\Delta x = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

15.3.3. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x — *приращение* ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точке $(x; f(x))$, соответствующее приращению Δx аргумента (отрезок KN на рис. 15.1).

15.4. Производные высших порядков

15.4.1. *Производная* n-го порядка функции $f(x)$ — это производная от производной $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))', \ f'''(x) = (f''(x))', \ \dots, \ f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

15.4.2. *Производные* n-го порядка некоторых функций:

1) $(x^n)^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$;

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ \ (a > 0, \ a \neq 1)$;

3) $(a^{kx})^{(n)} = k^n a^{kx} \ln^n a \ \ (a > 0, \ a \neq 1)$;

4) $(e^x)^{(n)} = e^x$;

5) $(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}$;

6) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$;

7) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$;

8) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

15.5. Производные первого и второго порядка функций, заданных параметрически

15.5.1. Функция, заданная *параметрически*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

15.5.2. Производная *первого* порядка:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

15.5.3. Производная *второго* порядка:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

15.6. Формулы Тейлора и Маклорена

15.6.1. Формула *Тейлора* для функции $y = f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

где $c = a + \theta x$, $0 < \theta < 1$.

15.6.2. Формула *Маклорена* для функции $y = f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n,$$

где $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

15.7. Правило Лопиталя

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0\ (\pm\infty)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0\ (\pm\infty)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ при условии, что последний предел существует.

Пример.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^5 + x^4 - 3}{1 - e^{2x-2}} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x^5 + x^4 - 3)'}{(1 - e^{2x-2})'} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{10x^4 + 4x^3}{-2e^{2x-2}} = \frac{14}{-2} = -7.$$

16. Функции нескольких переменных

16.1. Определение функции нескольких переменных

Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторой области U n-мерного пространства R^n ставится в соответствие единственное число u, то говорят, что в области U задана *функция n переменных*. Обозначение: $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Функция *двух* переменных: $z = f(x, y)$.
Функция *трех* переменных: $u = f(x, y, z)$.

16.2. Частные приращения, производные и дифференциалы

16.2.1. *Частные приращения* функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\ ,$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

16.2.2. *Частные производные* функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

16.2.3. *Частные дифференциалы* функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$d_x z = z'_x \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

$$d_y z = z'_y \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

16.2.4. Частные приращения, производные и дифференциалы функции n-переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяются аналогично.

Примеры:

1) $z = 3x^2 - 5y^2 + 7xy - 4x + 2y$,

$z'_x = 6x + 7y - 4$, $z'_y = -10y + 7x + 2$;

2) $z = (2x - y)e^{3x+2y}$,

$z'_x = 2e^{3x+2y} + (2x - y)\cdot 3 \cdot e^{3x+2y} =$

$= e^{3x+2y}(6x - 3y + 2)$,

$z'_y = -e^{3x+2y} + (2x - y)\cdot 2 \cdot e^{3x+2y} =$

$= e^{3x+2y}(4x - 2y - 1)$.

16.3. Полное приращение и полный дифференциал

16.3.1. *Полное приращение* функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Пусть Δz имеет вид

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Здесь A и B конечны, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Тогда функция $z = f(x, y)$ *дифференцируема* в точке $M(x, y)$.

16.3.2. Полный *дифференциал* функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \\ + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

16.3.3. Полное приращение, полный дифференциал и связь между ними для функции n-переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяются аналогично.

16.4. Производные сложных и неявных функций

16.4.1. Если $z = f(t, x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то полная производная функции $z = f(t, x, y)$ по t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

16.4.2. Если $z = f(x,y)$, где $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, то:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

16.4.3. Если функция двух переменных $z = f(x,y)$ задана *неявно* уравнением $F(x,y,z) = 0$, то:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

16.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

16.5.1. Частные производные второго порядка функции двух переменных $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{\textit{смешанные производные}};$$

В области непрерывности смешанных производных $z''_{xy} = z''_{yx}$.

16.5.2. Полный дифференциал второго порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

16.5.3. Частные производные n-го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right), \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial^{n-m} y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{m-1}\partial^{n-m} y}\right)$$

и т. д.

16.5.4. Полный дифференциал n-го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Пример:

$$z = \ln(5x - 3y), \quad z'_x = \frac{5}{5x - 3y}, \quad z'_y = -\frac{3}{5x - 3y},$$

$$dz = \frac{5dx - 3dy}{5x - 3y}; \quad z''_{xx} = -\frac{25}{(5x - 3y)^2},$$

$$z''_{yy} = -\frac{9}{(5x - 3y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{15}{(5x - 3y)^2},$$

$$d^2z = \frac{-25dx^2 + 30dxdy - 9dy^2}{(5x-3y)^2}.$$

16.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

16.6.1. Уравнение поверхности:

$$F(x,y,z) = 0.$$

16.6.2. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке M_0 (x_0, y_0, z_0):

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) +$$

$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

16.6.3. Уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

17. Первообразная и неопределенный интеграл

17.1. Определение первообразной и неопределенного интеграла

17.1.1. *Первообразная* — функция $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

17.1.2. *Неопределенный интеграл* — множество всех первообразных данной функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C = \text{const}.$$

Свойства:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$

2) $\int \left(af(x) + b\,g(x)\right) dx =$
$= a\int f(x)dx + b\int g(x)dx\,,\ a, b \in R;$

3) $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f\left(u(x)\right) du(x) =$
$= F\left(u(x)\right) + C\,.$

17.2. Таблица основных интегралов

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)\,;$

2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,;$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)\,;$

4) $\int e^x dx = e^x + C \quad ;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C\,;$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C\,;$

7) $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C\,;$

8) $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C\,;$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C\,;$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \ \ (a > 0)$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

13) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$;

14) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$;

15) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

16) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

17.3. Основные методы интегрирования

17.3.1. *Внесение под знак дифференциала*:

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \int f\left(u(x)\right)du(x).$$

Примеры:

1) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$;

2) $$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \left(e^x+1\right)^{-1/2} d\left(e^x+1\right) =$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + C .$$

17.3.2. *Интегрирование по частям*:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) .$$

Пример:

$$\int x^a \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right) =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\ln x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\ln x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C ,\ a \neq -1 .$$

17.3.3. *Замена переменной*:

$$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt .$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} \overset{x=t^6,\ dx=6t^5dt}{=} \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} =$$

$$= 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6t - 6\text{arctg}t +$$

$$+C \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 6\sqrt[6]{x} - 6\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

17.3.4. *Интегрирование дробных рациональных функций*. Любую несократимую дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно, причем $m < n$, можно представить в виде суммы *простейших* дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$. Путем выделения полного квадрата в знаменателе дроби $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ее можно выразить в виде суммы двух дробей вида $\frac{H}{(x^2+a^2)^k}$ и $\frac{Gx}{(x^2+a^2)^k}$, где $k \in N$.

1) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$;

2) $\int \frac{dx}{(x-a)^k} \overset{k\neq 1}{=} \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

3) $$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + C;$$

4) $$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} + C,$$

$k \in N,\ k > 1$;

5) $$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^k} = \frac{x}{2a^2(k-1)\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} +$$

$$+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{k-1}} + C,\ k \in N,\ k > 1.$$

17.3.5. *Интегрирование иррациональных выражений* вида:

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right).$$

Здесь R — рациональная функция.

Замена переменной $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где N — наименьшее общее кратное чисел l, n, ..., q, преобразует функцию R в рациональную функцию аргумента t.

Пример: $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{dx}{x}$. Замена переменной:

$$\frac{x+1}{x}=t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1} \Rightarrow dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}.$$

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{dx}{x}=-\int t\cdot(t^2-1)\cdot\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}=$$

$$=-\int\frac{2t^2dt}{t^2-1}=$$

$$=-2\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\overset{t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{=}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}-$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|+C.$$

17.3.6. *Интегрирование рациональных функций от* x, $\sqrt{a^2-x^2}$ *или* $\sqrt{x^2\pm a^2}$:

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\overset{x=a\sin t}{=}\int R(a\sin t,a\cos t)a\cos tdt$, $|x|<a$ (возможна подстановка $x=a\cos t$);

2) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx\overset{x=\frac{a}{\sin t}}{=}-\int R\left(\frac{a}{\sin t},a|\mathrm{ctg}t|\right)\frac{a\cos tdt}{\sin^2 t}$,

$|x|>a>0$ (возможна подстановка $x=\frac{a}{\cos t}$);

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx \overset{x=a\operatorname{tg}t}{=} \int R\left(a\operatorname{tg}t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{adt}{\cos^2 t}$

(возможна подстановка $x = a\operatorname{ctg}t$).

Некоторые частные случаи:

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$, $a > 0$;

2) $\int x\sqrt{a^2 \pm x^2}dx = \pm\frac{\left(a^2 \pm x^2\right)\sqrt{a^2 \pm x^2}}{3} + C, a > 0;$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0;$

4) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm$

$\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $a > 0$.

17.3.7. *Интегрирование произведений и степеней тригонометрических функций*:

1) $\int \sin ax \cos bxdx =$

$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right)dx$;

2) $\int \cos ax \cos bxdx =$

$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right)dx$;

3) $\int \sin ax \sin bxdx =$
$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)dx$;

4) $\int \sin^n x \cos xdx = \int \sin^n xd(\sin x)$;

5) $\int \cos^n x \sin xdx = -\int \cos^n xd(\cos x)$;

6) $\int \sin^{2n+1} xdx = -\int (1-\cos^2 x)^n d(\cos x)$;

7) $\int \cos^{2n+1} xdx = \int (1-\sin^2 x)^n d(\sin x)$;

8) $\int \sin^{2n} xdx = \frac{1}{2^n}\int (1-\cos 2x)^n dx$;

9) $\int \cos^{2n} xdx = \frac{1}{2^n}\int (1+\cos 2x)^n dx$.

17.3.8. *Интегрирование рациональных функций* от $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\int R(\cos x)\sin xdx = -\int R(\cos x)d\cos x$;

2) $\int R(\sin x)\cos xdx = \int R(\sin x)d\sin x$;

3) $\int R(\sin x, \cos x)dx$. *Универсальная* тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ преобразует подын-

тегральную функцию в рациональную функцию аргумента t;

4) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ при условии $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ преобразует подынтегральную функцию в рациональную функцию аргумента t.

Примеры.

1) $$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$$

2) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1} \overset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int \frac{2(1+t^2)dt}{(1+t^2)(4t+1-t^2+1+t^2)} =$

$= \int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + C.$

17.3.8. *Интегралы от некоторых трансцендентных функций*:

1) $\int x\sin ax dx = -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax + C$;

2) $\int x\cos ax dx = \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax + C$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

4) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

5) $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx + C$;

6) $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$;

7) $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$;

8) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

9) $\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;

10) $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$;

11) $\int \frac{\ln^a x}{x} dx = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$, $a \neq -1$;

12) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$;

13) $\int x^a \ln x dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\ln x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C$, $a \neq -1$.

18. Определенный интеграл

18.1. Определение и свойства

18.1.1. *Определенный интеграл* от непрерывной функции $f(x)$ по промежутку $[a;\ b]$ — предел $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda_n = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$.
Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\Delta x_i .$$

18.1.2. *Геометрический смысл*: если $f(x) \geq 0$ на $[a;\ b]$, $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ — площадь *криволинейной трапеции* (фигура $ABCD$ на рис. 18.1).

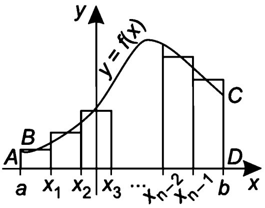


Рис. 18.1

18.1.2. *Свойства*:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b \left(pf(x) + q\,g(x)\right)dx = p\int\limits_a^b f(x)dx +$

$+q\int\limits_a^b g(x)dx$, $p, q \in R$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

5) $m \le f(x) \le M$, $x \in [a;b]$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),\ a < b;$$

6) $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in (a;b)$, $a < b$.

18.1.3. *Формула Ньютона—Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

Пример.

$$\int_1^4 \left(x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \ln|x|\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{64-1}{3} - 2(16-1) + 3(4-1) + \ln 4 = \ln 4.$$

18.2. Основные методы интегрирования

18.2.1. *Замена переменной*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Здесь $x=\varphi(t)$ — монотонная функция на $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

18.2.2. *Интегрирование по частям*:

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

Примеры:

1) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}$ — замена переменной:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=$$

$$2\int_0^1(t+1)^{-2}d(t+1)=-\frac{2}{1+t}\Big|_0^1=1;$$

2) $\int\limits_0^1 xe^x dx=\int\limits_0^1 xde^x=xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=$

$$xe^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=e-e+e^0=1.$$

18.3. Приложения определенного интеграла

18.3.1. *Площадь* S фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ при $f(x) > g(x)$, $a < b$ (рис. 18.2):

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx .$$

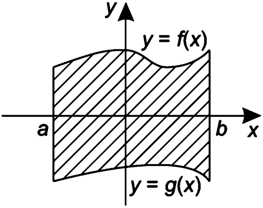


Рис. 18.2

18.3.2. *Площадь* S фигуры, *ограниченной замкнутой линией* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ при $t \in [\alpha; \beta]$:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt .$$

18.3.3. *Площадь S криволинейного сектора* (рис. 18.3), ограниченного линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ при $\alpha < \beta$:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

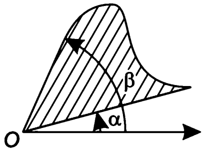


Рис. 18.3

18.3.4. *Длина L* дуги кривой $y = f(x)$ при $x \in [a;b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx .$$

18.3.5. *Длина L* дуги кривой $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ при $t \in [\alpha;\beta]$:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}dt .$$

18.3.6. *Длина* L дуги кривой $r = r(\varphi)$ при $\varphi \in [\alpha; \beta]$:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi\,.$$

18.3.7. *Объем* V тела, *площадь поперечного сечения* которого равна $S(x)$, где $x \in [a; b]$:

$$V = \int_{a}^{b} S(x)dx\,.$$

18.3.8. *Объем* V тела, полученного вращением *криволинейной трапеции*, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ при $a < b$, вокруг оси Ox:

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)dx\,.$$

18.3.9. *Объем* V тела, полученного вращением *криволинейной трапеции*, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ при $0 < a < b$, вокруг оси Oy:

$$V = 2\pi \int_{a}^{b} x\left|f(x)\right|dx\,.$$

18.3.10. *Площадь* S поверхности тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \geqslant 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ при $a < b$, вокруг оси Ox:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

18.3.11. *Статические моменты* плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g\,(x)$, $x = a$, $x = b$ при $f(x) > g\,(x)$, $a < b$

- относительно оси Ox:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx\,,$$

- относительно оси Oy:

$$M_y = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)x\,dx\,.$$

18.3.12. *Координаты центра масс* фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g\,(x)$, $x = a$, $x = b$ при $f(x) > g\,(x)$, $a < b$:

$$x_0 = \frac{M_y}{S},\ y_0 = \frac{M_x}{S},\ \text{где } S \text{ — площадь.}$$

Пример: Найдите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = x \text{ и } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ (рис. 18.4).}$$

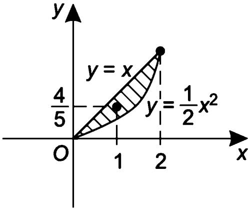


Рис. 18.4

$$S=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3},$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{4}x^4\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\right)=\frac{8}{15},$$

$$M_y=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)xdx=\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{2}x^3\right)dx=$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3},$$

$$x_0=\frac{M_y}{S}=1,\ y_0=\frac{M_x}{S}=\frac{8\cdot 3}{15\cdot 2}=\frac{4}{5}.$$

18.4. Несобственные интегралы

18.4.1. *Несобственный* интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке

- $[a;+\infty)$ (рис. 18.5):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,;$$

- $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

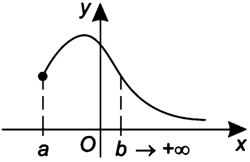


Рис. 18.5

18.4.2. Интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *сходятся*, если пределы $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ и $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ конечны. В противном случае они *расходятся*.

18.4.3. Несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, если сходятся *оба* интеграла в правой части; интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, если расходится *хотя бы один* интеграл в правой части.

18.4.4. *Несобственный* интеграл от функции $f(x)$ (рис. 18.6), непрерывной на промежутке $[a; b)$ и неограниченной в точке b ($\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \pm\infty$):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_{a}^{c} f(x)dx.$$

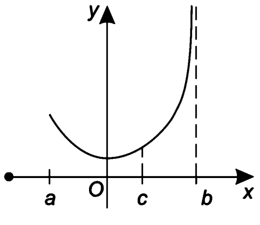


Рис. 18.6

Несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(a;\, b]$ и неограниченной в точке a ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

18.4.5. Интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходятся*, если пределы $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\lim\limits_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)dx$ конечны; в противном случае интегралы *расходятся.*

18.4.6. *Несобственный* интеграл от функции $f\,(x)$, непрерывной на промежутке $(a;\, b)$ и неограниченной в точках a и b ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \pm\infty$):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*, если сходятся оба интеграла в правой части. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится*, если расходится хотя бы один интеграл в правой части.

Примеры:

1) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2};$$

2) $$\int_a^b\frac{dx}{x-b}=\lim_{c\to b-0}\int_a^c\frac{dx}{x-b}=\lim_{c\to b-0}\ln|x-b|\Big|_a^c=$$

$$=\lim_{c\to b-0}\left(\ln|c-b|-\ln|a-b|\right)=-\infty,$$ то есть интеграл расходится.

19. Двойной интеграл

19.1. Определение и свойства

19.1.1. *Двойной интеграл* от непрерывной функции $f(x, y)$ по замкнутой области D — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й ячейки D_i (i = 1, 2, ..., n), на которые разбита область D, λ_n — наибольший из диаметров всех ячеек, $f(x_i, y_i)$ — значение функции в точке (x_i, y_i), лежащей в i-й ячейке (рис. 19.1). Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy\,.$$

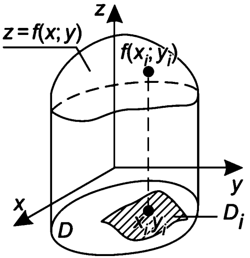


Рис. 19.1

19.1.2. *Геометрический* смысл: если $f(x,\ y) > 0$ в области D, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ — объем тела, изображенного на рис. 19.1.

19.1.3. *Свойства*:

1) $\iint\limits_D \left(pf(x,y)+q\,g(x,y)\right)dxdy =$

$$= p\iint\limits_D f(x,y)dxdy + q\iint\limits_D g(x,y)dxdy,\ \ p,q \in R;$$

2) $D = D_1 \cup D_2\,(\,D_1 \cap D_2 = \varnothing\,) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy +$$

$$+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy\ ;$$

3) $\iint\limits_D dxdy = S_D$ — площадь области D.

19.1.4. *Вычисление*:

1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ (рис. 19.2, *а*);

2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ (рис. 19.2, *б*).

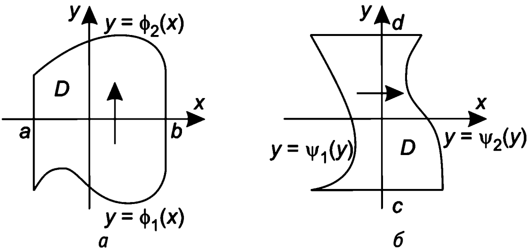


Рис. 19.2

19.1.5. Переход к *полярным* координатам:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

19.2. Приложения

19.2.1. *Площадь* области D:

$$S_D = \iint_D dxdy .$$

19.2.2. *Объем* тела (см. рис. 19.1):

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

19.2.3. *Масса* пластины, занимающей область D:

$$M = \iint_D \rho(x, y)dxdy \text{, где } \rho(x, y) \text{ — плотность.}$$

19.2.4. *Статические моменты* пластины

- относительно оси Ox: $M_x = \iint_D y\rho(x, y)dxdy$;
- относительно оси Oy: $M_y = \iint_D x\rho(x, y)dxdy$.

19.2.5. *Координаты* центра масс пластины:

$$x_0 = \frac{M_y}{M},\ y_0 = \frac{M_x}{M}.$$

19.2.6. *Моменты инерции* пластины:

- относительно оси Ox: $I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)dxdy$;
- относительно оси Oy: $I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)dxdy$.

19.2.7. Площадь S *поверхности*, заданной уравнением $z = f(x, y)$:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy\,.$$

Здесь D — проекция поверхности на плоскость Oxy (см. рис. 19.1).

Пример: Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -\sqrt{y}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ (рис. 19.3).

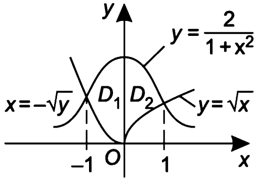


Рис. 19.3

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{2/(x^2+1)} dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2/(x^2+1)} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{x^2+1} - x^2 \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - \sqrt{x} \right) dx =$$

$$= \left(2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(2\operatorname{arctg} x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \pi - 1.$$

20. Тройной интеграл

20.1. Определение и свойства

20.1.1. *Тройной интеграл* от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по замкнутой области T — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, где ΔV_i — объем i-й ячейки T_i $(i = 1, 2, ..., n)$, на которые разбита область T, λ_n — наибольший из диаметров всех ячеек, $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции в точке (x_i, y_i, z_i), лежащей в i-й ячейке (рис. 20.1). Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz\,.$$

20.1.2. *Геометрический* смысл: если $f(x, y, z) = 1$ в области T, то $\iiint\limits_T dxdydz = V_T$ — объем тела T, изображенного на рис. 20.1.

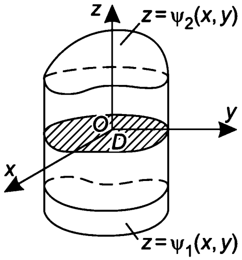


Рис. 20.1

20.1.3. *Свойства*:

1) $$\iiint\limits_T \big(pf(x,y,z)+qg(x,y,z)\big)dxdydz =$$
$$= p\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz +$$
$$+q\iiint\limits_T g(x,y,z)dxdydz\,,\ \ p,q\in R;$$

2) $T=T_1\cup T_2\ \ (T_1\cap T_2=\varnothing\ )\Rightarrow$
$$\Rightarrow \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

20.1.4. *Вычисление* (см. рис. 20.1, 19.2, *а*):

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

20.1.5. Переход к *цилиндрическим* координатам:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz\,.$$

20.1.6. Переход к *сферическим* координатам:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_T f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta\,.$$

20.2. Приложения

20.2.1. *Объем* тела *T*:

$$V_T = \iiint\limits_T dxdydz\,.$$

20.2.2. *Масса* тела T:

$$M = \iiint\limits_T \rho(x, y, z) dxdydz ,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность.

20.2.3. *Статические* моменты тела T:

- относительно плоскости Oyz:
  $$M_{yz} = \iiint\limits_T x\rho(x, y, z) dxdydz ;$$
- относительно плоскости Oxz:
  $$M_{xz} = \iiint\limits_T y\rho(x, y, z) dxdydz ;$$
- относительно плоскости Oxy:
  $$M_{xy} = \iiint\limits_T z\rho(x, y, z) dxdydz .$$

20.2.4. Координаты *центра масс* тела T:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M}, \; y_0 = \frac{M_{xz}}{M}, \; z_0 = \frac{M_{xy}}{M} .$$

20.2.5. Моменты *инерции* тела T:

- относительно оси Ox:
  $$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dxdydz ;$$

- относительно оси Oy:

$$I_y = \iiint\limits_T (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz\,;$$

- относительно оси Oz:

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz\,.$$

Пример. Найдите объем тела T, ограниченного параболоидом $3 - 2z = x^2 + y^2$, конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $y = 0$ при $y \geq 0$, $z \geq 0$ (рис. 20.2).

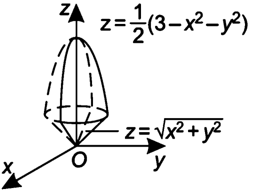


Рис. 20.2

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах: $z = \dfrac{1}{2}(3 - r^2)$; уравнение конуса в цилиндрических координатах: $z = r$ при $z \geq 0$. Поверхности пересекаются при $z = 1$, $r = 1$. Условие $y \geq 0$ означает, что $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Объем равен

$$V = \iiint\limits_T r dr d\varphi dz = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_r^{(3-r^2)/2} dz =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 r\left(\frac{3-r^2}{2} - r\right) dr = = \pi \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r^3 - r^2\right) dr =$$

$$= \pi \left(\frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{8}r^4 - \frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{24}\pi .$$

21. Криволинейные интегралы

21.1. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

21.1.1. *Криволинейный* интеграл по кривой AB от непрерывной функции $f(x, y, z)$ *по длине дуги* — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$, где Δl_i — длина дуги $\cup M_{i-1}M_i$, на которые разбита кривая AB (рис. 21.1), $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции $f(x, y, z)$ в точке (x_i, y_i, z_i), лежащей на дуге $\cup M_{i-1}M_i$, $\lambda_n = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta l_i$. Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} f(x, y, z)dl .$$

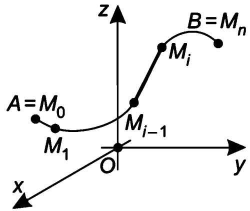


Рис. 21.1

21.1.2. *Геометрический* смысл: если $f(x, y, z) = 1$ на кривой AB, то $\int\limits_{AB} dl = L_{AB}$ — длина кривой AB.

21.1.3. *Свойства*:

1) $\int\limits_{AB} \big(pf(x,y,z) + qg(x,y,z)\big)\,dl =$

$= p\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl + q\int\limits_{AB} g(x,y,z)dl$, $p, q \in R$;

2) $AB = AC \cup CB \Rightarrow$

$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{AC} f(x,y,z)dl + \int\limits_{CB} f(x,y,z)dl$;

3) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{BA} f(x,y,z)dl$.

21.1.4. *Вычисление*:

1) $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\left(x,\varphi(x)\right)\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx$, где AB — плоская кривая, заданная уравнением $y=\varphi(x)$, a и b — абсциссы точек A и B соответственно, $a < b$;

2) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl =$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2+\left(\chi'(t)\right)}dt,$$

где AB — пространственная кривая, заданная параметрически $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$, t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие точкам A и B, $t_1 < t_2$.

21.1.5. *Приложения.*

1. *Длина* кривой AB: $L_{AB} = \int\limits_{AB} dl$.
2. *Масса* материальной кривой AB:

$M_{AB} = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)dl$, где $\rho(x,y,z)$ — плотность.

21.2. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

21.2.1. *Криволинейный* интеграл по кривой AB от непрерывной функции $f(x, y, z)$ *по координате* x — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)\Delta x_i$, где $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ — абсциссы точек дробления кривой AB на n дуг $\cup M_{i-1}M_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda_n = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\cup M_{i-1}M_i|$, $\tilde{M}_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i) \in \cup M_{i-1}M_i$ (рис. 21.2). Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)\Delta x_i = \int\limits_{AB} f(x, y, z)dx.$$

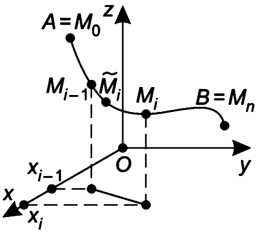


Рис. 21.2

21.2.2. *Свойства*:

1) $\int\limits_{AB}\left(pf(x,y,z)+qg(x,y,z)\right)dx =$

$= p\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx + q\int\limits_{AB} g(x,y,z)dx$, $p, q \in R$;

2) $AB = AC \cup CB \Rightarrow$

$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx = \int\limits_{AC} f(x,y,z)dx + \int\limits_{CB} f(x,y,z)dx$;

3) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx = -\int\limits_{BA} f(x,y,z)dx$.

21.2.2. *Общий вид* криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Здесь $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции, заданные на кривой AB.

21.2.3. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода общего вида *не зависел от пути интегрирования*, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом некоторой функции трех (в плоском случае — двух) переменных, то есть $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z)$. Тогда

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{A(x_1,y_1,z_1)}^{B(x_2,y_2,z_2)} du(x,y,z).$$

21.2.3. *Вычисление*:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(P\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right)\varphi'(t) + Q\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right)\psi'(t) + \right.$$

$$\left. + R\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right)\chi'(t)\right)dt.$$

Здесь AB — пространственная кривая, заданная параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$, t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие точкам A и B.

21.2.4. *Приложение*:

$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ — *работа* по перемещению материальной точки по кривой AB от A к B под действием силы $\vec{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, здесь $d\vec{r} = \{dx; dy; dz\}$.

21.2.5. *Формула Грина*:

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dxdx.$$

Здесь L — замкнутая кривая (контур), D — плоская область, ограниченная контуром L, направление обхода положительно — область остается слева (рис. 21.3).

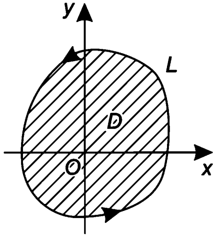


Рис. 21.3

21.2.6. Площадь области D, ограниченной контуром L (направление обхода положительно):

$$S=\oint_L xdy=-\oint_L ydx=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx\,.$$

Пример. Найдите площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$.

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot(b\sin t)'-b\sin t\cdot(a\cos t)'\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abdt=\frac{1}{2}ab\,t\Big|_0^{2\pi}=\pi ab\,.$$

22. Поверхностные интегралы

22.1. Поверхностный интеграл первого рода (по площади поверхности)

22.1.1. *Поверхностный* интеграл *по площади поверхности* от функции $f(x, y, z)$, непрерывной на поверхности σ, — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$, где ΔS_i — площади ячеек σ_i (i = 1, 2, ..., n), на которые разбита поверхность σ, $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции $f(x, y, z)$, в точке $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \sigma_i$, $\lambda_n = \max\limits_{i=1,\dots,n} d_i$ — наибольший из диаметров ячеек σ_i (рис. 22.1). Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dS.$$

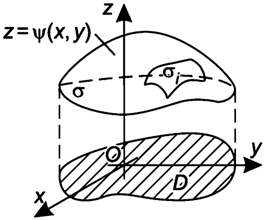


Рис. 22.1

22.1.2. *Свойства*:

1) $$\iint\limits_{\sigma} \left(pf(x,y,z) + qg(x,y,z)\right) dS =$$
$$= p\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dS + q\iint\limits_{\sigma} g(x,y,z)dS,\ p, q \in R;$$

2) $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \ \Rightarrow$
$$\Rightarrow \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)dS +$$
$$+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)dS.$$

22.1.3. *Геометрический* смысл: если $f(x, y, z) = 1$ на поверхности σ, то $\iint\limits_{\sigma} dS = S_\sigma$ — площадь поверхности σ.

22.1.4. *Вычисление*:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_{D} f\left(x,y,\psi(x,y)\right)\sqrt{1+\left(\psi'_x\right)^2+\left(\psi'_y\right)^2}\,dxdy.$$

Здесь $z=\psi(x,y)$ — уравнение поверхности σ, D — ее проекция на координатную плоскость Oxy (см. рис. 22.1).

22.1.5. *Приложение* поверхностных интегралов первого рода:

- *площадь* поверхности σ: $S_\sigma = \iint\limits_{\sigma} dS$;
- *масса* поверхности σ: $M = \iint\limits_{\sigma} \rho(x,y,z)dS$, где $\rho(x,y,z)$ — плотность.

Пример: Найдите площадь части параболоида $z=6-x^2-y^2$, лежащей в верхней полуплоскости (рис. 22.2).

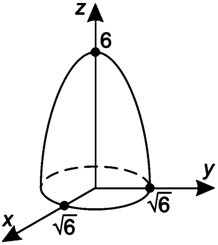


Рис. 22.2

Частные производные функции $z = 6 - x^2 - y^2$ имеют вид: $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$.

Дифференциал площади поверхности: $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$. Область интегрирования D задается неравенством $x^2 + y^2 \le 6$. Площадь поверхности: $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$.

Перейдя к цилиндрическим координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $0 \le r \le \sqrt{6}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, получим:

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{6}}r\sqrt{1+4r^2}dr=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{6}}\left(1+4r^2\right)^{1/2}d\left(1+4r^2\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{1}{12}(125-1)\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{62}{3}\pi.$$

22.2. Поверхностный интеграл второго рода (по координатам)

22.2.1. Если в результате непрерывного перемещения точки по любому контуру, лежащему на поверхности σ, при возвращении точки в начальное положение вектор $\vec{n}$ нормали в этой точке совпадет с исходным, то поверхность σ называется *двусторонней.* В противном случае поверхность называется *односторонней.*

22.2.2. *Поверхностный* интеграл от функции $f(x, y, z)$, непрерывной на двусторонней поверхности σ, по выбранной стороне поверхности по координатам x и y — предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i^{(xy)}$, где $\Delta S_i^{(xy)}$ — площадь проекции на плоскость Oxy ячейки σ_i (i = 1, 2, ..., n), на которые разбита поверхность σ, взятая со знаком +, если нормаль к σ_i образует острый угол с осью Oz, и взятая со знаком –, если этот угол тупой; $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции $f(x, y, z)$, в точке $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \sigma_i$, $\lambda_n = \max\limits_{i=1,\dots,n} d_i$ — наибольший из диаметров ячеек σ_i (рис. 22.3). Обозначение:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i^{(xy)} = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdy\,.$$

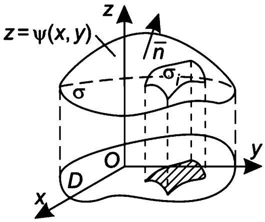


Рис. 22.3

22.2.3. *Свойства*:

1) $$\iint\limits_{\sigma} \left(pf(x,y,z)+qg(x,y,z)\right)dxdy =$$
$$= p\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy + q\iint\limits_{\sigma} g(x,y,z)dxdy,$$
$p,q \in R$;

2) $\sigma = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$ $(\sigma_1 \bigcap \sigma_2 = \varnothing) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)dxdy +$$
$$+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)dxdy;$$

3) $\iint\limits_{\sigma^+} f(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\sigma^-} f(x,y,z)dxdy$, где σ^+ и σ^- — различные стороны двусторонней поверхности σ.

22.2.4. *Вычисление*:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D} f\left(x,y,\psi(x,y)\right)dxdy \text{ , где}$$

$z=\psi(x,y)$ — уравнение поверхности σ, D — проекция поверхности σ на плоскость Oxy, выбирается знак +, если нормаль к σ образует острый угол с осью Oz, и знак –, если этот угол тупой.

22.2.5. *Общий вид* поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx +$$

$$+\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx +$$

$$+ R(x,y,z)dxdy.$$

Здесь $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — функции, непрерывные на поверхности σ, интеграл берется по выбранной стороне поверхности.

22.2.6. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)\,dS\,.$$

Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности σ .

23. Теория поля

23.1. Скалярное поле. Поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент

23.1.1. Если каждой точке M некоторой пространственной области T ставится в соответствие единственное число $u(M)$, то говорят, что в области T задано *скалярное поле* $u(M) = u(x, y, z)$.

23.1.2. *Поверхность уровня* скалярного поля $u(M)$ — поверхность, заданная уравнением $u(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$.

23.1.3. *Производная* скалярного поля $u(x, y, z)$ *по направлению* вектора $\vec{l}$ в точке $M\ (x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} =$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{u(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma) - u(x, y, z)}{t}.$$

Здесь $\cos\alpha,\ \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Вычисление:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

23.1.4. *Градиент* скалярного поля $u(x, y, z)$ — вектор $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

23.1.5. Связь градиента и производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\operatorname{grad} u)\cdot\vec{e}\,,$$

где $\vec{e}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{l}$.

23.1.6. Аналогично определяется скалярное поле на плоскости, его линии уровня, производная по направлению и градиент.

23.2. Векторное поле. Векторные линии и векторные трубки

23.2.1. Если каждой точке M некоторой пространственной области T ставится в соответствие единственный вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области T задано *векторное поле*:

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + \\ + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

23.2.2. *Векторная линия* векторного поля $\vec{a}(M)$ — линия, в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ является касательным вектором. Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

23.2.3. Поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через заданную кривую, не являющуюся векторной линией, — *векторная поверхность*. Если эта кривая замкнута, то векторная поверхность образует *векторную трубку*.

23.3. Поток векторного поля. Дивергенция. Теорема Остроградского—Гаусса

23.3.1. *Поток* Q векторного поля $\vec{a}(M) = \{a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)\}$ через поверхность σ в сторону единичного вектора нормали $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — поверхностный интеграл первого рода:

$$Q = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(a_x(x,y,z)\cos\alpha + a_y(x,y,z)\cos\beta + a_z(x,y,z)\cos\gamma\right) dS.$$

23.3.2. *Физический смысл* потока: $Q = \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ — масса несжимаемой жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность σ в сторону нормали $\vec{n}$ со скоростью

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\vec{i} +$$
$$+ v_y(x,y,z)\vec{j} + v_z(x,y,z)\vec{k}.$$

23.3.3. Выражение потока через поверхностный интеграл *второго* рода:

$$Q = \iint_{\sigma} a_x(x,y,z)dydz + a_y(x,y,z)dzdx + a_z(x,y,z)dxdy.$$

23.3.4. *Вычисление* потока через двойной интеграл. Если поверхность σ задана уравнением $z = \psi(x,y)$, то:

$$\cos\alpha = \frac{-\psi'_x}{\pm\sqrt{1+\left(\psi'_x\right)^2+\left(\psi'_y\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{-\psi'_y}{\pm\sqrt{1+\left(\psi'_x\right)^2+\left(\psi'_y\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\psi'_x\right)^2+\left(\psi'_y\right)^2}},$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\psi'_x\right)^2+\left(\psi'_y\right)^2}\,dxdy.$$

В направляющих косинусах перед радикалом выбирается знак +, если угол, образованный нормалью $\vec{n}$ и осью Oz, острый, в противном случае выбирается знак –. Тогда:

$$Q = \iint\limits_D \left(\mp a_x\left(x, y, \psi(x, y)\right)\psi'_x \mp a_y\left(x, y, \psi(x, y)\right)\psi'_y \pm \right.$$

$$\left. \pm\, a_z\left(x, y, \psi(x, y)\right)\right)dxdy.$$

Здесь D — проекция поверхности σ на плоскость Oxy.

23.3.5. *Дивергенция* векторного поля $\vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}.$$

23.3.6. *Теорема Остроградского—Гаусса*: поток Q векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ наружу равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля $\vec{a}(M)$ по области T, ограниченной поверхностью σ (рис. 23.1):

$$Q = \iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iiint_{T} \operatorname{div}\vec{a}dxdydz$$

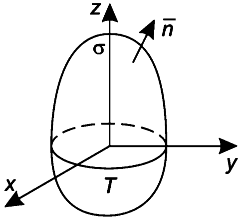


Рис. 23.1

23.4. Циркуляция векторного поля. Ротор. Теорема Стокса

23.4.1. *Линейный интеграл* векторного поля $\vec{a}(x,y,z)=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$ по кривой l — криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_l a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz\,.$$

23.4.2. Линейный интеграл векторного поля $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ по замкнутой кривой (по контуру) l — *циркуляция* векторного поля по контуру l:

$$C=\oint_l a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+$$

$$+a_z(x,y,z)dz=\oint_l \vec{a}\cdot d\vec{r},$$

$$\text{где } d\vec{r}=\{dx;dy;dz\}\,.$$

23.4.3. *Физический смысл* циркуляции векторного поля.

Если $\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ — сила, действующая на материальную точку, то циркуляция

$$C=\oint\limits_{l}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint\limits_{l}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

представляет собой работу по перемещению материальной точки по контуру l под действием этой силы.

23.4.4. *Ротор* векторного поля $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ — вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Символическая запись ротора векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$

23.4.5. *Теорема Стокса*: циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру l равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность σ, ограниченную контуром l:

$$\oint_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma (\operatorname{rot} \vec{a}) \cdot \vec{n} dS .$$

Направление обхода контура таково, что поверхность σ остается слева (рис. 23.2).

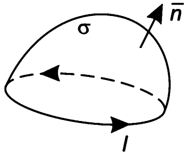


Рис. 23.2

23.5. Потенциальное и соленоидальное векторные поля

23.5.1. *Потенциальное* векторное поле — поле $\vec{a}(M)$, которое является градиентом некоторого скалярного поля $u(M)$, то есть $\vec{a} = \operatorname{grad} u$. При этом скалярное поле

$u = u\,(M)$ — *потенциал* векторного поля $\vec{a}(M)$:

$$u(M) = \int_{M_0M} \vec{a} \cdot d\vec{r}\,.$$

Здесь интеграл берется по любой кривой M_0M, лежащей в области задания поля $\vec{a}(M)$.

Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля $\vec{a}(M)$: векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциально тогда и только тогда, когда в каждой точке области задания поля выполняется условие $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

Свойство потенциального векторного поля $\vec{a}(M)$: $C = \oint_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$ для любого контура l, лежащего в области задания поля $\vec{a}(M)$.

23.5.2. *Соленоидальное* векторное поле — поле $\vec{a}(M)$, которое является ротором некоторого векторного поля $\vec{b}(M)$, то есть $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{b}$. При этом векторное поле $\vec{b} = \vec{b}(M)$ — *векторный потенциал* поля $\vec{a}(M)$.

Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля $\vec{a}(M)$: векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидально тогда и только тогда, когда в каждой точке области задания поля выполняется условие $\operatorname{div}\vec{a}=0$.

Свойство соленоидального векторного поля $\vec{a}(M)$: $Q=\iint\limits_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=0$, где σ — любая *замкнутая* поверхность, лежащая в области задания поля $\vec{a}(M)$.

23.6. Операторы Гамильтона и Лапласа

23.6.1. *Оператор Гамильтона* (*набла*):

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

23.6.2. Выражение градиента, дивергенции и ротора через оператор Гамильтона:

$$\operatorname{grad}u=\vec{\nabla}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

23.6.3. *Оператор Лапласа*:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

23.6.4. *Уравнение Лапласа*:

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Скалярное поле $u(x, y, z)$, удовлетворяющее уравнению Лапласа, — *гармоническое*.

Пример. Проверьте, является ли векторное поле $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$, соленоидальным или потенциальным. В случае потенциальности найдите его потенциал.

Координатная форма поля $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$ имеет вид $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$, значит:

$$a_x = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad a_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$a_z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Частные производные:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}.$$

Дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{1}{r^2} \neq 0.$$

То есть поле не соленоидально.

Частные производные:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z}=-\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=-\frac{2yz}{r^4},$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial z}=-\frac{2xz}{r^4},$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}=-\frac{2xy}{r^4} \;\Rightarrow\; \operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}.$$

То есть поле потенциально.

Потенциал векторного поля $\vec{a}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$:

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}_{r_0^2}\right).$$

Окончательно получаем $u(r)=\ln\dfrac{r}{r_0}$, $r_0\neq 0$.

24. Ряды

24.1. Числовые ряды

24.1.1. *Числовой ряд* — выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — числовая последовательность $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$; a_n — *общий член* ряда.

24.1.2. Последовательность *частичных сумм* числового ряда:

$$S_1 = a_1,\; S_2 = a_1 + a_2,\; \dots,\; S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\; \dots$$

24.1.3. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*, если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где S — число, в противном случае ряд *расходится*. Сумма сходящегося ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

24.1.4. *Необходимый* признак сходимости числового ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

24.1.5. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

24.1.6. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — *положительный*, если $a_n \geq 0$ при любых $n \in N$.

24.1.7. *Признаки сходимости* положительных рядов.

1. Признак *сравнения*: если члены двух положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с номера n_0 (при $n \geq n_0 \geq 1$), удовлетворяют условию $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. *Предельный* признак *сравнения*: если для двух положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, у которых $a_n \neq 0,\ b_n \neq 0$, выполняется условие

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$, где $0<q<\infty$, то из сходимости (расходимости) одного ряда следует сходимость (расходимость) другого ряда.

3. Признак *Даламбера*: если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, у которого $a_n\neq 0$, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$, то при $d<1$ ряд сходится, при $d>1$ ряд расходится.
4. *Радикальный* признак *Коши*: если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится.
5. *Интегральный* признак *Коши*: если функция $f(x) > 0$, непрерывна и не возрастает на $[0;+\infty)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$.

24.1.8. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — *знакопеременный*, если его члены — числа произвольных знаков.

24.1.9. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — *знакочередующийся*, если $a_n a_{n+1} < 0$ при любых $n \in N$.

24.1.10. Признак *Лейбница*: если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняются два условия:

1) последовательность $|a_n|$ — убывающая,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

24.1.11. *Геометрический* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ при $|q| < 1$ сходится к сумме $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}$, а при $|q| \geq 1$ расходится.

24.1.12. Ряд *Дирихле* (обобщенный гармонический ряд): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ ($p > 0$) сходится при $p > 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, расходится при $p \leq 1$.

Частный случай: *гармонический* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

24.2. Функциональные ряды. Степенные ряды

24.2.1. *Функциональный* ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots, u_n(x), \ldots$ — последовательность функций, заданных в области D. Если в каждой точке x_0 области $D_1 \subset D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, а во всех точках вне области D_1 расходится, то область D_1 — *область сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Сумма сходящегося функционального ряда:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

24.2.2. Область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ находится из неравенства $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$

и исследования поведения числового ряда в граничных точках полученного промежутка.

24.2.3. *Степенной ряд* по степеням x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{, где } c_n \in R.$$

Степенной ряд по степеням $(x - x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \text{, где } x_0, c_n \in R.$$

24.2.4. *Радиус сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ — число $r > 0$, такое, что при $|x| < r$ ряд сходится, а при $|x| > r$ ряд расходится. *Интервал* сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$: $(-r; r)$.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ — число $r > 0$, такое, что при $|x - x_0| < r$ ряд сходится, а при $|x - x_0| > r$ ряд расходится. *Интервал* сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$: $(x_0 - r; x_0 + r)$.

Пример. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n n\sqrt{n}}$.

Интервал сходимости найдем из условия $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}3^n n\sqrt{n}}{3^{n+1}(n+1)\sqrt{n+1}(x+1)^n}\right|=$$

$$\frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\right|=\frac{|x+1|}{3};$$

$$\frac{|x+1|}{3}<1\Leftrightarrow|x+1|<3\Leftrightarrow-4<x<2.$$

Интервал сходимости: $(-4;\ 2)$. Граничные точки: $x_1=-4$ и $x_2=2$.

$x_1=-4\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится абсолютно, так как сходится ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

$x_2=2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится. Область абсолютной сходимости: $[-4;\ 2]$.

24.3. Разложение функций в степенные ряды

24.3.1. *Ряд Тейлора* для функции $f(x)$ на промежутке $(x_0 - r; x_0 + r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{, где } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

24.3.2. *Ряд Маклорена* для функции $f(x)$ на промежутке $(-r; r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{, где } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

24.3.3. Степенные ряды для некоторых функций:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$;

2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$;

4) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

5) $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (область абсолютной сходимости рядов 1–5: $(-\infty; +\infty)$);

6) $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ (область сходимости: $(-1;\ 1]$, область абсолютной сходимости: $(-1;\ 1)$);

7) $(x+1)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$ (область абсолютной сходимости: $(-1;\ 1)$).

24.4. Тригонометрические ряды Фурье

24.4.1. *Тригонометрический ряд Фурье* для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi; \pi]$:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Здесь $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$.

24.4.2. *Тригонометрический ряд Фурье* для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-p; p]$:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Здесь $a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$, $b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx$.

24.4.3. *Тригонометрический ряд Фурье* для функции $f(x)$, *четной* на промежутке $[-p; p]$:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p}.$$

Здесь $a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$.

24.4.4. *Тригонометрический ряд Фурье* для функции $f(x)$, *нечетной* на промежутке $[-p; p]$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}.$$

Здесь $b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx$.

25. Обыкновенные дифференциальные уравнения

25.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

25.1.1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* (ОДУ-1) — уравнение $F(x, y, y') = 0$, где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция, y' — производная неизвестной функции.

ОДУ-1 в *нормальной* форме: $y' = f(x, y)$.

ОДУ-1 в *дифференциальной* форме:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

25.1.2. *Решение* ОДУ-1: дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению.

Общее решение ОДУ-1: функция $y = \varphi(x, C)$, однозначно разрешимая относительно C, которая при любом C является решением уравнения.

Общий интеграл ОДУ-1: уравнение $F(x,y)=C$, задающее общее решение в неявной форме.

25.1.3. *Задача Коши* для ОДУ-1: нахождение такого решения, которое удовлетворяет *начальному условию* $y(x_0)=y_0$. Решение задачи Коши — *частное решение.*

25.2. Основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

25.2.2. Уравнение с *разделяющимися переменными*: $y'=\dfrac{f_1(x)}{f_2(y)}$. Метод решения: разделение переменных $f_2(y)dy=f_1(x)dx$ и интегрирование.

25.2.3. *Однородное* уравнение: $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Метод решения: замена переменной по формулам $u=\dfrac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u'x+u$ преобразует однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

25.2.3. *Линейное* уравнение: $y'+p(x)y=q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — заданные функции. Метод решения — метод *вариации произвольной постоянной*: если $y = C\varphi(x)$ — общее решение линейного *однородного* уравнения $y' + p(x)y = 0$, то общее решение линейного *неоднородного* уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ ищется в форме $y = C(x)\varphi(x)$.

25.2.4. Уравнение *Бернулли*: $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Метод решения: замена переменной по формуле $u = y^{1-n}$ преобразует уравнение Бернулли в линейное уравнение $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$.

25.2.5. Уравнение в *полных дифференциалах*:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

$$\text{где } \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Метод решения:

интегрирование $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$.

25.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

25.3.1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка* (ОДУ-n) — уравнение вида

$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$, где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция, $y', y'' \dots y^{(n)}$ — производные неизвестной функции, n — порядок уравнения.

ОДУ-n в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

25.3.2. *Решение* ОДУ-n: функция $y = \varphi(x)$, n раз дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению.

Общее решение ОДУ-n:

функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, являющаяся решением при любых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ и такая, что следующая система однозначно разрешима относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

25.3.3. *Задача Коши* для ОДУ-n: нахождение такого решения, которое удовлетворяет *начальным условиям* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Решение задачи Коши — *частное решение*.

25.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка

25.4.1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Метод решения: последовательное интегрирование.

25.4.2. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$. Метод решения: замена переменной по формулам $z(x) = y^{(k)}, z' = y^{(k+1)}, \dots, z^{(n-k)} = y^{(n)}$ понижает порядок уравнения на k.

25.4.3. Уравнение вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Метод решения: замена переменных по формулам $z(y) = y', y'' = z'z, y''' = z''z^2 + (z')^2 z$ и т. д. понижает порядок уравнения на 1.

25.5. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка

25.5.1. *Линейное* ОДУ-n:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_i(x)$ при $i = 1, 2, \dots, n$, $f(x)$ — заданные функции.

Линейное ОДУ-n — *однородное*, если $f(x) = 0$; в противном случае — *неоднородное*.

25.5.2. Общее решение линейного *однородного* ОДУ-n:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

Здесь $y_i = y_i(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ — *фундаментальная* система решений (ФСР), то есть n решений линейного однородного ОДУ-n, удовлетворяющих условию *линейной независимости*:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

25.5.3. Общее решение линейного *неоднородного* ОДУ-n:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + \tilde{y} .$$

Здесь $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ — частное решение неоднородного ОДУ-n.

25.5.4. Линейное ОДУ-n с *постоянными коэффициентами*:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) .$$

Здесь a_i при $i = 1, 2, \ldots, n$ — заданные числа.

25.5.5. *Характеристическое* уравнение для линейного однородного ОДУ-n с постоянными коэффициентами:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,.$$

25.5.6. *Решения* линейного однородного ОДУ-n в зависимости от корней характеристического уравнения:

Корни характеристического уравнения	**Решения**
λ — действительный простой корень	$e^{\lambda x}$
λ — действительный корень кратности r	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}$
$a \pm bi$ — простые корни	$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$
$a \pm bi$ — корни кратности r	$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{r-1}e^{ax}\cos bx,$ $e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{r-1}e^{ax}\sin bx$

25.5.7. Вид *частного решения* $\tilde{y}$ линейного неоднородного ОДУ-n с постоянными коэффициентами в зависимости от вида его правой части $f(x)$

иллюстрирует следующая таблица. Здесь $P_n(x)$, $R_m(x)$, $S_n(x)$ — заданные многочлены, $Q_n(x)$, $U_k(x)$, $V_k(x)$ — многочлены с неизвестными коэффициентами; M, N — заданные числа, A, B — неизвестные числа:

Вид правой части	**Дополнительное условие**	**Вид частного решения**
$f(x) = P_n(x)e^{ax}$	a не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{y} = Q_n(x)e^{ax}$
$f(x) = P_n(x)e^{ax}$	a является корнем характеристического уравнения кратности r	$\tilde{y} = Q_n(x)x^r e^{ax}$

Вид правой части	**Дополнительное условие**	**Вид частного решения**
$f(x) = e^{ax}(M\cos bx + N\sin bx)$	$a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения	$\tilde{y} = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$
$f(x) = e^{ax}(M\cos bx + N\sin bx)$	$a \pm bi$ — корни характеристического уравнения кратности r	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$
$f(x) = e^{ax}(R_m(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx)$	$a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения	$\tilde{y} = e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$, где $k = \max(m, n)$

Продолжение ▸

(Продолжение)

Вид правой части	Дополнительное условие	Вид частного решения
$f(x) = e^{ax}(R_m(x)\cos bx + $ $+S_n(x)\sin bx)$	$a \pm bi$ – корни характеристического уравнения кратности r	$\tilde{y} = x^r e^{ax}(U_k(x)\cos bx +$ $+V_k(x)\sin bx)$, где $k = \max(m, n)$

25.6. Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

25.6.1. *Система* ОДУ-1 в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2 \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2 \ldots, y_n) \\ \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2 \ldots, y_n) \end{cases}.$$

Здесь x — независимая переменная, $y_i = y_i(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ — неизвестные функции, $y_i' = y_i'(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ — их производные.

25.6.2. *Решение* системы ОДУ-1: n дифференцируемых функций $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$, удовлетворяющих системе.

25.6.3. *Общее решение* ОДУ-1:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2 \ldots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2 \ldots, C_n) \\ \qquad \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2 \ldots, C_n) \end{cases}.$$

Эта система n функций должна являться решением при любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и быть однозначно разрешимой относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

25.7. Система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

25.7.1. Система *линейных однородных* ОДУ-1 с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}.$$

25.7.2. *Матричная форма* системы линейных однородных ОДУ-1 с постоянными коэффициентами: $Y' = AY$. Здесь:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

25.7.3. *Общее решение* системы линейных однородных ОДУ-1 с постоянными коэффициентами в случае, когда все собственные числа матрицы A действительные и разные:

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} \Gamma_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \Gamma_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} \Gamma_n .$$

Здесь λ_i — собственные числа матрицы A, Γ_i — ненулевые собственные векторы матрицы A: $A\Gamma_i = \lambda_i \Gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

26. Теория функций комплексной переменной

26.1. Функция комплексной переменной

26.1.1. Если каждому комплексному числу $z = x + iy$, принадлежащему области D, ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w = u + iv$, то говорят, что в области D задана *функция комплексной переменной* (ФКП) $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $u = u(x, y)$ — *действительная*, $v = v(x, y)$ — *мнимая* части ФКП.

26.1.2. Основные функции комплексной переменной:

1) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$;

2) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$;

3) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$;

4) $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$;

5) $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$;

6) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2n\pi)$, $n \in Z$, $|z|$ — модуль, $\arg z$ — аргумент комплексной переменной z.

Пример: Найдите i^i. Преобразуем выражение: $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i(\arg i + 2n\pi))}$.

Поскольку $\ln|i| = \ln 1 = 0$, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$,

то $i^i = e^{i^2((\pi/2)+2n\pi)} = e^{-(\pi/2)-2n\pi}$, $n \in Z$.

26.2. Дифференцируемость функции комплексной переменной

26.2.1. *Производная* ФКП — предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ — приращение аргумента.

Обозначение производной: $f'(z) = \dfrac{dw}{dz}$. Если этот предел существует, то ФКП $f(z)$ *дифференцируема* в точке z.

26.2.2. *Необходимое и достаточное* условие дифференцируемости ФКП в точке: для того чтобы ФКП $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке $M(x, y)$ и удовлетворяли в этой точке условиям *Коши-Римана* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

26.2.3. При выполнении условий Коши-Римана производная ФКП:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

26.2.4. Действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части дифференцируемой ФКП $f(z)$ — *гармонические* функции.

26.2.5. Для нахождения производной ФКП $f(z)$ применяются те же приемы, что и для нахождения производной функции действительной переменной $f(x)$.

26.2.6. ФКП $f(z)$ — *регулярная* (*аналитическая*) в точке z_0, если она однозначна и дифференцируема в некотором круге $0 < |z - z_0| < R$ с центром в точке z_0.

Пример. Найдите $f'(z)$ в точке $z_0 = \pi i$, если $f(z) = z^2 e^{-z}$. $f'(z) = 2ze^{-z} - z^2 e^{-z} = ze^{-z}(2 - z)$; $f'(z_0) = \pi i e^{-\pi i}(2 - \pi i) = -\pi i(2 - \pi i) = -\pi^2 - 2\pi i$.

26.3. Интеграл от функции комплексной переменной

26.3.1. *Интеграл* от ФКП $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по кривой AB:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} u(x, y)dx - v(x, y)dy + $$
$$+i\int_{AB} u(x, y)dy + v(x, y)dx.$$

26.3.2. *Свойства*:

1) $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$;

2) $\int\limits_{AB} \left(pf(z)+qg(z)\right)dz = p\int\limits_{AB} f(z)dz + q\int\limits_{AB} g(z)dz$, $p, q \in R$;

3) $AB = AC \cup CB$
$\Rightarrow \int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AC} f(z)dz + \int\limits_{CB} f(z)dz.$

26.3.3. *Вычисление* интеграла от ФКП:

1) если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x)$, то (здесь a и b — абсциссы точек A и B соответственно):

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_a^b \left(u(x,\varphi(x)) - v(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)dx +$$
$$+i\int\limits_a^b \left(u(x,\varphi(x))\varphi'(x) + v(x,\varphi(x))\right)dx;$$

2) если кривая AB задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то (здесь t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие точкам A и B):

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big(u(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) - v(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,dt +$$

$$+i\int\limits_{t_1}^{t_2} \big(u(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) + v(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\big)\,dt\,;$$

3) если кривая AB — дуга окружности $z = Re^{\varphi i}$, где R = const, то (здесь φ_1 и φ_2 — значения угла φ, соответствующие точкам A и B):

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = Ri\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(Re^{\varphi i})e^{\varphi i}d\varphi\,.$$

26.4. Ряд Лорана для функции комплексной переменной

26.4.1. *Ряд Лорана* для ФКП $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\underbrace{\ldots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{главная часть}} +$$

$$+\underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots}_{\text{регулярная часть}} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z - z_0)^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Область сходимости — кольцо $r < |z - z_0| < R$.

26.4.2. *Коэффициенты* ряда Лорана: $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_l \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$, где $n \in Z$, l — окружность с центром в точке z_0 и радиусом r_l, удовлетворяющим неравенству $r < r_l < R$.

26.5. Изолированные особые точки функции комплексной переменной

26.5.1. Точка z_0 — *изолированная* особая точка ФКП $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некотором круге $0 < |z - z_0| < R$ с центром в точке z_0, но нерегулярна в самой точке z_0.

26.5.2. *Классификация* изолированных особых точек:

№	Тип особой точки	Признак особой точки
1	z_0 — устранимая особая точка, если предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ конечен	z_0 — устранимая $\Leftrightarrow$ ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 не содержит главной части, то есть имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
2	z_0 — полюс, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$; порядок полюса — кратность корня z_0 функции $(f(z))^{-1}$	z_0 — полюс порядка k $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит конечное число членов, то есть имеет вид $\sum\limits_{n=-k}^{-1} a_n(z-z_0)^n$, где $a_{-k}\neq 0$
3	z_0 — существенно особая точка, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует	z_0 — существенно особая точка $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное множество членов, то есть имеет вид $\sum\limits_{m=-\infty}^{-1} a_m(z-z_0)^m$

26.6. Вычеты функции комплексной переменной. Теорема Коши о вычетах

26.6.1. *Вычет* ФКП $f(z)$ в точке z_0 — коэффициент a_{-1} ее ряда Лорана в окрестности точки z_0. Обозначение: $\operatorname{res} f(z_0)$.

26.6.2. *Вычисление* вычетов в изолированных особых точках:

№	Тип особой точки	Вычисление вычета
1	z_0 — устранимая особая точка	$\operatorname{res} f(z_0) = 0$
2	z_0 — простой полюс (полюс порядка 1)	$\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$; если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
3	z_0 — полюс порядка k	$\operatorname{res} f(z_0) = = \dfrac{1}{(k-1)!} \cdot \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{k-1}\left(f(z)(z - z_0)^k\right)}{dz^{k-1}}$
4	z_0 — существенно особая точка	$\operatorname{res} f(z_0)$ находится непосредственно из разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана

26.6.3. *Теорема Коши* о вычетах: если ФКП $f(z)$ регулярна в замкнутой области D всюду, за исключением конечного числа точек $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, то интеграл от нее по границе L области D в положительном направлении равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов в точках $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$:

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{m=1}^{n}\operatorname{res} f(z_m).$$

Пример: По теореме Коши о вычетах вычислите $\int_L \frac{2z-1}{z(z-2i)^3}dz$, где L — окружность $|z-2i|=1$ (рис. 26.1), обход которой происходит в положительном направлении (круг остается слева).

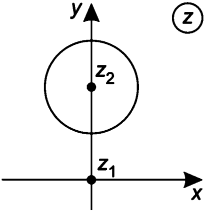


Рис. 26.1

Изолированные особые точки подынтегральной функции: $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$.

Точка $z_1 = 0$ не принадлежит кругу, точка $z_2 = 2i$ принадлежит. Точка $z_2 = 2i$ — полюс третьего порядка, так как является корнем кратности 3 знаменателя. Вычет в этой точке:

$$\operatorname{res} f(2i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{2z-1}{z(z-2i)^3}(z-2i)^3\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(2 - z^{-1}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(z^{-2}\right)' = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(-2z^{-3}\right) = -\frac{i}{8}.$$

Интеграл равен:

$$\int_L \frac{2z-1}{z(z-2i)^3}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

27. Теория вероятностей

27.1. События и операции с ними

27.1.1. *Случайный* опыт — опыт, который может закончиться любым результатом, принадлежащим некоторому множеству, но предугадать результат до опыта невозможно.

27.1.2. *Элементарные* события, или *исходы* случайного опыта, — результаты опыта, взаимно исключающие друг друга. Обозначение: ω, ω_i. Множество всех исходов — пространство элементарных событий. Обозначение: Ω.

27.1.3. *Событие A* — подмножество (часть множества) пространства Ω.

27.1.4. Событие, *противоположное* событию A, — событие, содержащее все исходы, не входящие в событие A (рис. 27.1). Обозначение: $\bar{A}$.

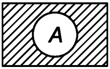


Рис. 27.1

27.1.5. Событие B — *следствие* события A, если оно содержит все исходы события A (рис. 27.2). Обозначение: $A \subset B$.

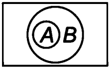


Рис. 27.2

27.1.6. *Операции* с событиями:

1) *сумма* событий A и B — событие C, содержащее все исходы события A и события B (рис. 27.3). Обозначение: $C = A + B$;

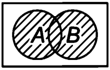


Рис. 27.3

2) *произведение* событий A и B — событие C, состоящее из всех исходов, входящих как в событие A, так и в событие B (рис. 27.4). Обозначение: $C = AB$;

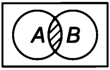


Рис. 27.4

3) *разность* между событием A и событием B — событие C, состоящее из всех исходов, входящих в событие A, но не входящих в событие B (рис. 27.5). Обозначение: $C = A - B$.

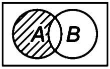


Рис. 27.5

27.1.7. *Достоверное* событие — событие, содержащее все исходы случайного опыта. Обозначение: Ω.

27.1.8. *Невозможное* событие — событие, не содержащее ни одного исхода случайного опыта (пустое множество). Обозначение: $\varnothing$.

27.1.9. *Поле* событий — множество F событий, удовлетворяющих условиям:

1) $\Omega \in F$;

2) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in F \Rightarrow \sum\limits_n A_n \in F$.

27.1.10. Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ поля F образует *полную группу* событий, если

$$A_i A_j = \varnothing \ (i \neq j), \ \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

27.2. Вероятность события

27.2.1. *Вероятность* события A поля F — функция $P(A)$ событий поля, удовлетворяющая условиям:

1) $P(\Omega) = 1$;
2) $P(A) \geq 0$;
3) $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$, если $A_i \in F$,

$A_i A_j = \varnothing \ (i \neq j)$, $i, j = 1, 2, ..., n, ...$

27.2.2. Основные *свойства*:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\varnothing) = 0$;
3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
4) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

27.2.3. *Классическое* определение вероятности: если пространство элементарных событий Ω состоит из *конечного* множества *равновозможных* исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то вероятность события A равна отношению числа $m(A)$ исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Пример: В фирме трудятся 8 человек — 5 женщин и 3 мужчины. Три человека, выбранные наугад, отправляются в командировку. Найдите вероятности следующих событий:

1) среди выбранных все 3 — женщины,
2) среди выбранных — 2 женщины и 1 мужчина,
3) среди выбранных — 1 женщина и 2 мужчины,
4) среди выбранных все 3 — мужчины.

Общее число исходов опыта — число n способов, которыми можно выбрать 3 человек из 8:

$$n = C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Число исходов, благоприятствующих первому событию, — это число способов выбора 3 женщин из 5:

$$m_1 = C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Тогда $P_1 = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

Число исходов, благоприятствующих второму событию, — это число способов выбора 2 женщин из 5, умноженное на число выбора 1 мужчины из 3:

$$m_2 = C_5^2 C_3^1 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!}{1!2!} = 10 \cdot 3 = 30 .$$

Тогда $P_2 = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$.

Число исходов, благоприятствующих третьему событию, вычисляется аналогично предыдущему:

$$m_3 = C_5^1 C_3^2 = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{3!}{1!2!} = 5 \cdot 3 = 15 .$$

Тогда $P_3 = \dfrac{15}{56}$.

Число исходов, благоприятствующих четвертому событию, равно $m_4 = C_3^3 = 1$, тогда $P_4 = \dfrac{1}{56}$.

27.2.4. *Геометрическое* определение вероятности: если пространство элементарных событий изображается областью ***конечной меры*** и события, изображаемые областями одинаковой меры, ***равновозможны***, то вероятность события A равна отношению меры области, изображающей событие A, к мере пространства элементарных событий Ω:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} .$$

Здесь $mes(A)$ — мера области, изображающей событие A. Под *мерой* области в данном случае подразумевается:

1) длина, если Ω — кривая на плоскости или в пространстве;
2) площадь, если Ω — плоская область или поверхность;
3) объем, если Ω — пространственная область.

27.3. Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса

27.3.1. *Условная* вероятность события A при условии, что произошло событие B:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ при } P(B) > 0.$$

27.3.2. Теорема *умножения* вероятностей *двух* событий: $P(AB) = P(A)P(B/A)$.

Теорема *умножения* вероятностей n событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) =$$
$$= P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

27.3.3. Формула *полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i).$$

Здесь H_i при $i = 1, 2, ..., n$ — *гипотезы*, сопутствующие событию A (события, образующие полную группу).

27.3.4. Формула *Байеса* (формула апостериорных вероятностей гипотез):

$$P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

27.4. Дискретные случайные величины

27.4.1. *Дискретная случайная* величина (ДСВ) — числовая функция $X = X(\omega)$, заданная на пространстве Ω элементарных событий и принимающая на этом пространстве изолированные значения: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$.

27.4.2. *Закон распределения* ДСВ:

$$P(x_i) = p_i, \text{ причем } \sum_i p_i = 1.$$

27.4.3. *Функция распределения* ДСВ:

$$F(x) = P(X < x).$$

Для ДСВ эта функция разрывна.

27.4.4. *Числовые* характеристики ДСВ:

1) *математическое ожидание*:

$$M(X) = m_x = \sum_i x_i p_i;$$

2) *дисперсия*: $D(X) = d_x = M(X - M(X))^2 =$

$$= \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i;$$

3) *среднее квадратическое отклонение*:

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

27.5. Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

27.5.1. *Биномиальный* закон распределения. Если проводится серия n независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с одной и той же вероятностью p, то вероятность того, что событие A произойдет в данной серии m раз:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \ m = 0,1,2,\ldots,n, \ q = 1 - p.$$

Математическое ожидание: $M(X) = np$; дисперсия: $D(X) = npq$; среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

27.5.2. Закон распределения *Пуассона*:

$$P(X = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!},\ m = 0, 1, 2, ...,$$

Математическое ожидание: $M(X) = a$; дисперсия: $D(X) = a$; среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{a}$.

27.6. Непрерывные случайные величины

27.6.1. *Непрерывная случайная* величина (НСВ) — числовая функция $X = X(\omega)$, заданная на пространстве Ω элементарных событий и принимающая на этом пространстве такие значения, что вероятность каждого из них равна нулю. Часто все значения НСВ заполняют некоторый промежуток числовой оси, например $(a; b)$,
$[a; b]$ или $(-\infty; +\infty)$.

27.6.2. *Функция распределения* НСВ:
$F(x) = P(X < x)$. Для НСВ эта функция непрерывна.

27.6.3. *Плотность вероятности* $f(x)$ НСВ:

$f(x) = F'(x)$. При этом $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

27.6.4. *Числовые* характеристики НСВ:

1) *математическое ожидание*:

$$M(X) = m_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

2) *дисперсия*: $D(X) = d_x = M(X - M(X))^2 =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx;$$

3) *среднее квадратическое отклонение*:
$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

27.7. Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

27.7.1. *Равномерный* закон распределения НСВ (рис. 27.6, *а*):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ при } x\in[a;b]\\ 0 \text{ при } x\notin[a;b]\end{cases}.$$

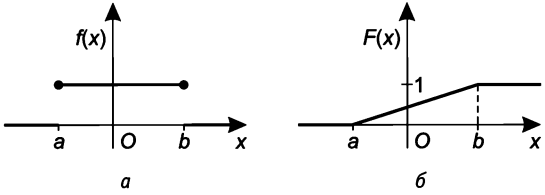


Рис. 27.6

Функция распределения (рис. 27.6, *б*):

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a\le x\le b\\ 1 \quad \text{при} \quad x>b\end{cases}.$$

Математическое ожидание: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$; дисперсия: $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$; среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{6}$.

27.7.2. *Показательный* закон распределения (рис. 27.7*а*):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

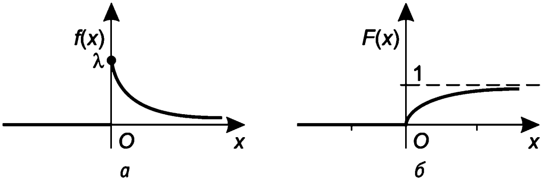


Рис. 27.7

Функция распределения (рис. 27.7, *б*):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

Математическое ожидание: $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; дисперсия: $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$; среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

27.7.3. *Нормальный* закон распределения (рис. 27.8, *а*):

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

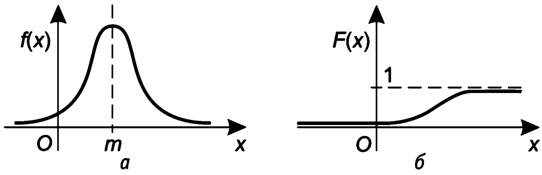


Рис. 27.8

Функция распределения (рис. 27.8, *б*):

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция *Лапласа*, значения которой обычно задаются таблицей. Математическое ожидание: $M(X)=m$; дисперсия: $D(X)=\sigma^2$; среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sigma$.

Ольга Судавная

Краткий справочник по математике для абитуриентов и студентов. Формулы, алгоритмы, примеры

Заведующая редакцией	*В. Малышкина*
Ведущий редактор	*Л. Неволайнен*
Научный редактор	*В. Фролов*
Художник	*К. Радзевич*
Корректор	*А. Жданов*
Верстка	*А. Шляго*

ООО «Мир книг», 198206, Санкт-Петербург,
Петергофское шоссе, 73, лит. А29.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Подписано в печать 29.08.12. Формат 60x88/32.
Усл. п. л. 9,800. Тираж 5000. Заказ

Отпечатано с готовых диапозитивов в Типография «Вятка».
610033, Киров, ул. Московская, 122.